actică și pedagogică — București, 1972

Acad. Gh. Mihoc
N. Micu

Elemente de teoria probabilităților și statistică

Manual pentru anul IV liceu, secția reală și licee de specialitate

Acad. Gh. Mihoc N. Micu

Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică

Manual pentru anul IV liceu secţia reală

Editura didactică şi pedagogică
Bucureşti, 1972

Cuprins

Capitolul 1. CÎMP DE PROBABILITATE FINIT
§ 1. Evenimente 3
§ 2. Probabilitate 11
Probleme 23
Capitolul 2. FORMULE ŞI SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE
§ 1. Formule pentru calcularea unor probabilităţi 26
§ 2. Scheme clasice de probabilitate 29
Probleme 31
Capitolul 3. VARIABILE ALEATOARE. VALORI MEDII
§ 1. Definiţia variabilei aleatoare. Exemple 34
§ 2. Operaţii cu variabile aleatoare 36
§ 3. Valori medii 42
§ 4. Alte valori tipice ale variabilei aleatoare 49
Probleme 53
Capitolul 4. ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ
§ 1. Noţiunile de bază ale statisticii matematice . . . . . .
§ 2. Reprezentarea grafică a seriilor statistice 69
§ 3. Elemente caracteristice ale unei serii statistice 74
§ 4. Distribuţii teoretice şi distribuţii experimentale 81
Probleme 87
Indicaţii şi răspunsuri 90
Bibliografie 97

Redactor: **EUGENIA PANTELIMON**
Tehnoredactor: **NAZĂRU PETRE**

1 Cîmp de probabilitate finit

§ 1. Evenimente

1. Probă. Eveniment

Să considerăm experienţa aruncării unui zar. Este, evident, vorba de o *experienţă aleatoare** adică o experienţă al cărei rezultat variază la întîmplare.

Să notăm cu {1} apariţia feţei cu un singur punct, cu {2} apariţia feţei cu două puncte etc.

În urma unei aruncări obţinem unul din rezultatele

(I) {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}.

Alte rezultate nu mai sînt posibile şi unul dintre ele se produce neapărat. Acestea sînt *probele* experienţei.

În general probă se numeşte rezultatul unes experienţe aleatoare.

În legătură cu aruncarea zarului ne putem pune o serie de întrebări ale căror răspunsuri nu le putem cunoaşte decît după apariţia uneia din probele (I). De pildă, ne putem întreba dacă vom obţine o faţă cu un număr $\leqslant 4$ puncte etc.

Toate aceste situaţii legate de experienţa noastră şi despre care putem spune cu certitudine că s-au produs sau nu, după efectuarea experienţei, poartă numele de *evenimente.*

Pentru precizarea acestor noţiuni să reluăm experienţa aruncării unui zar şi să presupunem că ne punem întrebarea dacă vom obţine

* Cuvîntul „aleator" are sens de întîmplător şi provine de la latinescul *alea,* care înseamnă zar.

o față cu un număr par de puncte. În acest caz, experiența este aruncarea zarului, proba este rezultatul care se obține la sfîrșitul experienței, iar evenimentul care ne interesează este apariția unui număr par de puncte. Evenimentul se realizează, dacă se obține una din probele {2}, {4}, {6}, și nu se realizează în caz contrar. Există deci, trei probe care realizează evenimentul și acest eveniment este perfect determinat de cele trei probe.

Dacă în cadrul aceleiași experiențe ne interesează apariția feței cu un punct, sîntem în prezența unui eveniment care poate fi realizat de o singură probă, și anume proba {1}.

Evenimentul care poate fi realizat de o probă și numai de una se numește *eveniment elementar.*

Celelalte evenimente le numim *compuse.*

Alte exemple

1. *Să considerăm experiența constînd din aruncarea unui zar de două ori la rînd.*

Rezultatul experienței nu va mai putea fi reprezentat printr-un număr, ci printr-o pereche de numere.

Probele experienței sînt

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

unde prin (i, j) $(i, i = 1,2,3,4,5,6)$ am notat apariția feței cu i puncte la prima aruncare și a feței cu j puncte la a doua aruncare.

Ele, considerate înainte de începerea experienței, sînt evenimente elementare. După terminarea experienței, vom avea unul și numai unul din aceste rezultate.

Există multe evenimente legate de această experiență, ca, de exemplu, suma punctelor apărute să fie 8, ca numărul de puncte de pe fața ieșită la prima aruncare să fie mai mare decît numărul de puncte de pe fața ieșită la a doua aruncare etc.

Despre fiecare din acestea putem spune cu certitudine dacă s-a realizat sau nu, după efectuarea experienței, prin cunoașterea probei rezultate din experiență.

Să considerăm astfel, evenimentul A, constînd în obținerea numărului 8 prin însumarea numărului de puncte realizate în două aruncări ale unui zar. Să presupunem că am efectuat experiența și ne-a ieșit proba (3, 6). Întrucît $3 + 6 = 9$, înseamnă că

evenimentul A nu s-a realizat. Dimpotrivă, dacă a apărut proba (3,5) înseamnă că evenimentul A s-a realizat. Probele care realizează evenimentul A, sînt

(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2).

2. *Fie (A) și (B) două persoane. Ne întrebăm care din aceste două persoane va fi în viață și care nu, după trecerea unui an.*

Este vorba de o experiență aleatoare, deoarece nu putem ști cu certitudine, dacă o persoană va fi în viață sau nu peste un an.

Să notăm cu A faptul că (A) este în viață peste un an și cu $\overline{A}$, faptul că nu este.

La fel, notăm cu B și cu $\overline{B}$ faptul că (B) este, respectiv că nu este în viață peste un an.

Atunci, probele experienței sînt

$$(A, B),\ (A, \overline{B}),\ (\overline{A}, B),\ (\overline{A}, \overline{B}),$$

unde am notat cu:

(A, B) faptul că după trecerea unui an, ambele persoane sînt în viață;

$(A, \overline{B})$ faptul că după un an, (A) este în viață și (B) nu;

$(\overline{A}, B)$ faptul că după un an, (A) nu este în viață, iar (B) este;

$(\overline{A}, \overline{B})$ faptul că după un an ambele persoane nu mai sînt în viață.

Considerate la începutul experienței, acestea sînt evenimentele elementare. Avem, desigur, și alte evenimente. De exemplu, ne putem întreba dacă peste un an cel puțin una din persoanele (A) și (B) este în viață. Nu putem cunoaște cu certitudine la începutul experienței, răspunsul. Este vorba deci de un eveniment legat de experiența noastră. Probele care realizează acest eveniment sînt (A, B), $(A, \overline{B})$, $(\overline{A}, B)$.

3. *Să considerăm ca experiență aleatoare tragerea cu un tun a cărui bătaie maximă este a. Tunul fiind în centrul axelor de coordonate, rezultatul tragerii este atingerea unui punct (x, y) din plan cu $x^2 + y^2 \leqslant a^2$.*

Sîntem în prezența unei experiențe aleatoare cu o infinitate de probe și deci de evenimente elementare.

Un eveniment al acestei experiențe este atingerea unui punct dintr-o porțiune dată în interiorul cercului $x^2 + y^2 = a^2$.

2. Eveniment sigur. Eveniment imposibil

Fiecărei experiențe i se atașează două evenimente cu caracter special: *evenimentul sigur* și *evenimentul imposibil.*

Evenimentul sigur este un eveniment care se realizează cu certitudine la fiecare efectuare a experienței.

De exemplu, la aruncarea unui zar, apariția uneia din fețele 1,2, 3,4,5,6 este evenimentul sigur al experienței. Scoaterea unei bile de

culoare albă sau neagră dintr-o urnă, conținînd numai bile albe și negre este de asemenea un eveniment sigur.

Evenimentul imposibil nu se realizează la nici o efectuare a experienței. În cazul aruncării unui zar, apariția unei alte fețe decît 1,2,3, 4,5,6 este un eveniment imposibil. Extragerea unei bile de altă culoare decît alb sau negru dintr-o urnă, conținînd numai bile albe și negre, este de asemenea un eveniment imposibil.

Este clar că evenimentul imposibil constă în nerealizarea evenimentului sigur, sau că evenimentul sigur constă în nerealizarea evenimentului imposibil.

Evenimentul sigur îl vom nota cu litera E, iar evenimentul imposibil cu $\emptyset$.

3. Evenimente contrare

Să notăm cu A evenimentul apariției uneia din fețele 1,2,3 la aruncarea unui zar și cu B apariția uneia din fețele 4,5,6. Se observă că atunci cînd A nu se realizează, adică nu obținem ca rezultat al aruncării zarului una din fețele 1,2,3, se realizează B, adică obținem una din fețele 4,5,6 și invers, cînd nu se realizează B, se realizează A.

În cazul unei extrageri dintr-o urnă conținînd bile numai albe și bile negre să notăm cu A evenimentul extragerii unei bile albe și cu B evenimentul extragerii unei bile negre. Și acum se observă că nerealizarea lui A este echivalentă cu realizarea lui B, iar nerealizarea lui B este echivalentă cu realizarea lui A.

În ambele cazuri vom spune că A și B sînt *evenimente contrare*.

Întotdeauna, unui eveniment îi corespunde un eveniment contrar, a cărui realizare înseamnă prin definiție, nerealizarea primului. Se observă că dacă un eveniment B este contrariul unui eveniment A, atunci și A este evenimentul contrar al lui B.

Remarcăm că evenimentul sigur și evenimentul imposibil sînt contrare unul altuia.

Evenimentul contrar unui eveniment A îl vom nota de la caz la caz cu $\bar{A}$ sau CA. În acest caz, sînt evidente relațiile

$$\bar{\bar{A}} = A; \quad \bar{E} = \emptyset; \quad \bar{\emptyset} = E.$$

4. Evenimente compatibile. Evenimente incompatibile

Evenimentele A și B se numesc *compatibile* dacă se pot realiza simultan, adică dacă există probe care realizează atît pe A cît și B. În caz contrar, evenimentele sînt *incompatibile*.

La aruncarea unui zar, evenimentul A constînd din apariția uneia din fețele 1,2 sau 3 și B, constînd din apariția uneia din fețele 2,3 sau 5 sînt compatibile, deoarece dacă vom obține ca rezultat al experienței apariția feței 3, înseamnă că s-au realizat ambele evenimente. Același lucru se întîmplă dacă obținem fața 2.

Dacă notăm cu C evenimentul apariției uneia din fețele 4 sau 5, observăm că evenimentele A și C sînt incompatibile, iar evenimentele B și C sînt compatibile.

Evenimentele contrare sînt incompatibile. În general un număr finit de evenimente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt compatibile dacă se pot realiza simultan, adică dacă există cel puțin o probă care realizează pe fiecare din aceste evenimente.

În caz contrar vom spune că evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt incompatibile în totalitatea lor, sau mai scurt incompatibile.

Dacă evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sînt compatibile două cîte două nu înseamnă că sînt compatibile în totalitatea lor. La aruncarea zarului să considerăm evenimentele A_1, A_2, A_3, constînd respectiv în: apariția uneia din fețele 1 sau 2; apariția uneia din fețele 2 sau 3; apariția uneia din fețele 3 sau 1. Se observă imediat că evenimentele A_1, A_2, A_3 sînt compatibile două cîte două, dar nu sînt compatibile în totalitatea lor.

5. Eveniment implicat de alt eveniment

Prin definiție vom spune că *evenimentul B este implicat de evenimentul A*, sau că *evenimentul A implică evenimentul B, dacă B se realizează de fiecare dată cînd se realizează A.*

Să considerăm o urnă care conține 10 bile numerotate cu numerele 1,2, ...,10. Să notăm cu A apariția uneia din bilele 1,4,7 și cu B

apariția uneia din bilele 1,4,7,10, atunci cînd se face o extragere din urnă. Este evident, că în conformitate cu definiția de mai sus, A implică B.

Orice eveniment implică evenimentul sigur.

Pentru generalizarea unor rezultate se admite că *evenimentul imposibil implică orice eveniment.*

Să reluăm experiența cu urna care conține 10 bile și să notăm cu {1}, evenimentul apariției bilei 1, cu {2} evenimentul apariției bilei 2 etc.

Acestea sînt evenimente elementare ale experienței. Să observăm că toate aceste evenimente au o proprietate comună: nu sînt implicate de alte evenimente. Astfel, apariția bilei 1, nu poate fi o consecință a unui alt rezultat așa cum în exemplul de mai sus, realizarea evenimentului B era o consecință a realizării evenimentului A.

Această proprietate caracterizează evenimentele elementare și poate fi luată ca definiție a lor.

6. Reprezentarea evenimentelor ca mulțimi

Cînd în cadrul unei experiențe ne fixăm atenția asupra unui eveniment, de fapt, noi ne fixăm atenția asupra unei părți din mulțimea probelor experienței.

Astfel, la aruncarea zarului, dacă ne interesează evenimentul A, constînd în apariția unei fețe cu un număr par de puncte, noi urmărim dacă obținem sau nu una din probele {2}, {4}, {6}. Altceva nu ne interesează. Evenimentul este perfect determinat de mulțimea formată din aceste trei probe și deci îl putem identifica. Vom scrie

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

Dacă ne interesează apariția unei fețe cu un număr ≤ 4 puncte urmărim dacă apare una din probele {1}, {2}, {3}, {4} și atît.

Evenimentul respectiv este determinat de mulțimea de probe care îl realizează: {1, 2, 3, 4}.

În cazul aruncării de două ori a zarului, dacă ne interesează obținerea sumei 8, ne interesează dacă apare sau nu una din probele (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) și deci evenimentul respectiv îl vom scrie ca o mulțime ale cărei elemente sînt perechi de numere: {(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)}.

Acum este justificată și notarea evenimentului imposibil prin Ø, deoarece mulțimea probelor care îl realizează este vidă. Este justificată de asemenea, notarea evenimentului contrar lui A prin $\complement A$.

Am văzut mai înainte că evenimentul elementar este realizat de o singură probă. El este perfect determinat de proba care îl realizează.

Am văzut că „A implică B", înseamnă că realizarea evenimentului A atrage după sine realizarea evenimentului B, adică printre probele care realizează pe B se găsesc toate probele care realizează pe A și deci putem scrie $A \subset B$.

7. Operații cu evenimente

Fiind date două evenimente A și B, *numim reuniunea lor și notăm prin $A \cup B$, evenimentul a cărui realizare constă în realizarea a cel puțin unuia din cele două evenimente.* Uneori evenimentul $A \cup B$ se mai citește „A sau B"

La aruncarea zarului să considerăm evenimentele

$$A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{2, 3, 5\}.$$

Evenimentul A se realizează dacă obținem una din probele {1}, {2}, {3}, iar B se realizează dacă obținem {2}, {3}, sau {5}. Deci, pentru a se realiza cel puțin unul din evenimentele A, B, trebuie să obținem una din probele {1}, {2}, {3}, {5} și deci

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}.$$

Intersecția evenimentelor A și B este prin definiție evenimentul $A \cap B$ a cărui realizare constă în realizarea simultană a evenimente-

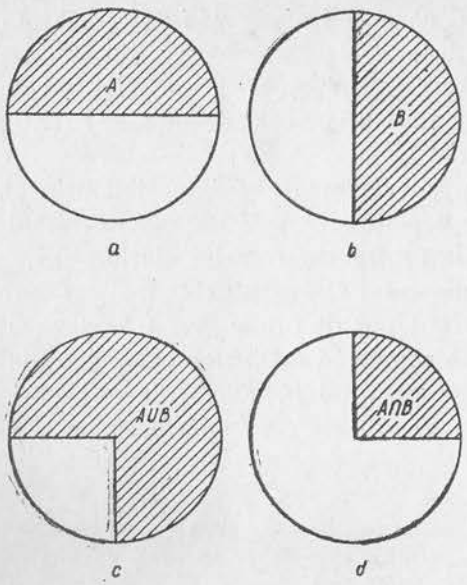

Fig. 1

lor A, B. Uneori, vom citi *A* şi *B* în loc de *A* intersectat cu *B*.

În cazul de mai sus

$$A \cap B = \{2,3\}.$$

Să presupunem că se trage un foc asupra unei ţinte circulare (fig. 1). Să notăm cu *A* evenimentul ca să fie atinsă jumătatea superioară a ţintei (fig. 1, *a*) şi cu *B* evenimentul ca să fie atinsă jumătatea din dreapta a ţintei (fig. 1, *b*). Atunci evenimentul $A \cup B$ înseamnă atingerea porţiunii haşurate în figura 1, *c*, iar $A \cap B$, înseamnă atingerea porţiunii haşurate în figura 1, *d*.

Definiţiile de mai sus se păstrează pentru orice număr finit de evenimente. De exemplu $A \cup B \cup C$ este evenimentul a cărui realizare constă în realizarea a cel puţin unuia din evenimentele *A*, *B*, *C*, iar $A \cap B \cap C$ este evenimentul a cărui realizare înseamnă realizarea simultană a evenimentelor *A*, *B*, *C*.

8. Cîmp de evenimente

Mulţimea tuturor evenimentelor legate de o experienţă (inclusiv evenimentul sigur şi evenimentul imposibil) *formează un cîmp de evenimente.*

Să considerăm o urnă conţinînd patru bile numerotate 1, 2, 3, 4. Cîmpul de evenimente al experienţei constînd într-o extragere din această urnă este format din Ø, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1,4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4} = *E*.

§ 2. Probabilitate

1. Frecvenţă

Să considerăm o experienţă şi un eveniment *A* corespunzător acestei experienţe. Să repetăm această experienţă de *n* ori în condiţii identice, să notăm prin α numărul de realizări ale evenimentului *A* şi prin $(n - \alpha)$ numărul de nerealizări ale lui *A*.

Numărul

$$f_n = \frac{\alpha}{n}$$

poartă numele de frecvenţă.

De exemplu, să aruncăm o monedă de 100 ori şi să admitem că faţa conţinînd stema a apărut de 53 de ori.

Numărul

$$f_{100} = \frac{53}{100}$$

reprezintă frecvenţa apariţiei stemei în aceste 100 de experienţe.

Frecvenţa variază de la experienţă la experienţă. Ea are un caracter empiric, experimental.

Numărul α poate varia de la 0 la *n* inclusiv.

Avem $\alpha = 0$, cînd din *n* repetări consecutive ale experienţei, evenimentul *A* nu s-a realizat niciodată. Dimpotrivă, dacă din *n* experienţe consecutive, evenimentul *A* s-a realizat în toate experienţele, rezultă $\alpha = n$. În toate celelalte cazuri

$$0 < \alpha < n.$$

De aici rezultă $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, oricare ar fi *n*.

Experienţa arată că pentru multe fenomene de masă frecvenţa f_n, pentru *n* crescînd necontenit, se apropie din ce în ce mai mult de o anumită constantă. Această proprietate poartă numele de *lege a numerelor mari.*

2. Evenimente egal posibile

Fie A şi B două evenimente referitoare la aceeaşi experienţă. Dacă din motive de perfectă simetrie, putem afirma că ambele evenimente au aceeaşi şansă de a fi realizate, spunem că evenimentele sînt *egal posibile.*

Exemple

1. Experienţa constă din aruncarea unei monede. Fie A şi B evenimentele de a ieşi respectiv o faţă sau cealaltă.

Dacă moneda este perfectă, nu avem nici un motiv să admitem că una din feţe are o şansă mai mare de apariţie decît alta. Acest lucru se confirmă experimental prin faptul că aruncînd moneda de un număr mare de ori cele două feţe apar aproximativ la fel de des. Evenimentele A şi B sînt egal posibile.

2. Experienţa constă de data aceasta din aruncarea unui zar perfect cubic şi construit dintr-un material omogen, astfel ca centrul de simetrie să coincidă cu centrul de greutate. Vom presupune de asemenea că aruncarea se face pe o suprafaţă perfect netedă. În aceste condiţii nu avem nici un motiv să presupunem că la un număr mare de aruncări va ieşi cu precădere o anumită faţă a zarului. Evenimentele elementare $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$ au aceeaşi şansă de a se verifica. Spunem că sînt evenimente egal posibile.

3. Într-o urnă avem n bile identice ca mărime şi masă, numerotate de la 1 la n inclusiv.

Scoatem din urnă o bilă fără ca să ne uităm la număr decît după ce am scos bila. Fie $\{k\}$ evenimentul de a scoate din urnă bila purtînd pe ea numărul k.

Condiţiile în care efectuăm experienţa ne permit să afirmăm că evenimentele $\{k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ sînt egal posibile.

Observaţie. În exemplele de mai sus, evenimentele egal posibile considerate sînt elementare. Mai mult decît atît, toate evenimentele elementare sînt egal posibile. *Evenimentele elementare, în cazul cînd toate sînt egal posibile, le vom numi de aici înainte cazuri egal posibile.*

3. Probabilitate

Definiţie. Probabilitatea unui eveniment este egală cu raportul dintre numărul cazurilor egal posibile care realizează evenimentul şi numărul cazurilor egal posibile.

Mai pe scurt, vom spune că probabilitatea evenimentului A este egală cu raportul dintre numărul m al cazurilor favorabile realizării evenimentului A şi numărul n al cazurilor egal posibile. Vom scrie

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Exemple

1. *O urnă conţine 20 de bile identice, numerotate cu 1, 2, ..., 20. Care este probabilitatea ca printr-o extracţie să obţinem o bilă numerotată cu un pătrat perfect?*

Să notăm cu A evenimentul căruia vrem să-i calculăm probabilitatea. Numărul cazurilor egal posibile este 20. Numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului A este 4. Aceste patru cazuri sînt: extragerea bilei *1*, a bilei *4*, a bilei *9* sau a bilei 16. Avem deci

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

2. *Care este probabilitatea ca aruncînd două zaruri să obţinem o „dublă", adică să obţinem la fiecare dintre cele două zaruri acelaşi număr de puncte?*

Notînd cu A unul din zaruri şi cu B pe celălalt, avem 36 de cazuri posibile, după cum reiese din următorul tabel:

A B	A B	A B	A B	A B	A B
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

Cazurile favorabile sînt în număr de 6. Deci, probabilitatea căutată este $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

3. *Care este probabilitatea ca aruncînd două zaruri să obținem două fețe însumînd 7 puncte?*

Cazurile favorabile sînt *(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)* și *(6, 1)*. Deci, probabilitatea este $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Să observăm că în ultimele exemple aruncarea a 2 zaruri poate fi înlocuită cu 2 aruncări ale aceluiași zar.

Cele două experiențe sînt din punct de vedere teoretic *echivalente.*

4. *Să presupunem că avem două urne, prima conținînd 8 bile numerotate 1, 2,.., 8, iar a doua 7 bile, numerotate cu 1, 2, ..., 7, a) Care este probabilitatea ca făcînd cîte o extracție din fiecare urnă să obținem din prima urnă un număr impar, iar din a doua urnă un număr par? b) Dar probabilitatea de a obține două numere de parități diferite? c) Dar probabilitatea ca numărul înscris pe bila extrasă din prima urnă să fie mai mic decît cel de pe bila extrasă din a doua urnă?*

a) Cazurile favorabile la prima din aceste probleme le putem figura prin *(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6),* și *(7, 4), (7, 2), (7, 6).* Cum numărul cazurilor posibile este egal cu 56, probabilitatea căutată este $\frac{12}{56} = \frac{3}{14}$.

b) La a doua problemă avem mai multe cazuri favorabile. Pe lîngă cele de mai sus mai avem și *(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (6, 1), (6, 3), (6, 5), (6, 7), (8, 1), (8, 3), (8, 5), (8, 7).* Probabilitatea este $\frac{28}{56} = \frac{1}{2}$.

c) Să scriem toate cazurile posibile

(1,1),	*(1,2),*	*(1,3),*	*(1,4),*	*(1,5),*	*(1,6),*	*(1,7)*
(2,1),	*(2,2),*	*(2,3),*	*(2,4),*	*(2,5),*	*(2,6),*	*(2,7)*
(3,1),	*(3,2),*	*(3,3),*	*(3,4),*	*(3,5),*	*(3,6),*	*(3,7)*
(4,1),	*(4,2),*	*(4,3),*	*(4,4),*	*(4,5),*	*(4,6),*	*(4,7)*
(5,1),	*(5,2),*	*(5,3),*	*(5,4),*	*(5,5),*	*(5,6),*	*(5,7)*
(6,1),	*(6,2),*	*(6,3),*	*(6,4),*	*(6,5),*	*(6,6),*	*(6,7)*
(7,1),	*(7,2),*	*(7,3),*	*(7,4),*	*(7,5),*	*(7,6),*	*(7,7)*
(8,1),	*(8,2),*	*(8,3),*	*(8,4),*	*(8,5),*	*(8,6),*	*(8,7),*

Cazurile favorabile au fost subliniate cu o linie. Ele sînt în număr de 21. Deci, probabilitatea căutată este egală cu $\frac{21}{56} = \frac{3}{8}$.

4. Proprietăți ale probabilităților

Probabilitatea unui eveniment A, pe care o notăm prin $P(A)$, se bucură de următoarele proprietăți

1°. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

2°. $P(E) = 1$.

3°. $P(\emptyset) = 0$.

4°. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, dacă $A \cap B = \emptyset$.

5°. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Relațiile 1° rezultă imediat din faptul evident că $0 \leqslant m \leqslant n$ și deci $0 \leqslant \frac{m}{n} \leqslant 1$.

Pentru a demonstra relația 2°, vom observa că pentru evenimentul sigur $m = n$. Într-adevăr, în cazul evenimentului sigur, dacă am avea $m < n$, înseamnă că există evenimente elementare pentru care evenimentul E nu se verifică, ceea ce este imposibil întrucît știm că evenimentul E se realizează întotdeauna.

Relația 3° rezultă din faptul că pentru evenimentul $\emptyset$ avem $m = 0$. Într-adevăr dacă am avea $m > 0$ înseamnă că există cel puțin un caz posibil care realizează pe $\emptyset$, ceea ce este absurd.

Pentru a demonstra relația 4°, notăm prin n numărul cazurilor egal posibile, prin m numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului A, prin s numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului B. Deoarece $A \cap B = \emptyset$ înseamnă că evenimentele A și B sînt incompatibile între ele. Nici unul din cazurile favorabile realizării evenimentului A nu poate realiza pe B invers. Rezultă că $m + s$ reprezintă numărul cazurilor egal posibile favorabile evenimentului $A \cup B$.

Conform definiției probabilității avem

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{s}{n} \quad P(A \cup B) = \frac{m+s}{n}$$

și deci

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \text{ dacă } A \cap B = \emptyset.$$

Pentru a demonstra relația 5°, observăm că

$$A \cup \bar{A} = E, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset.$$

În baza egalității 4°, reiese

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(E).$$

Ținînd seama de 2°, obținem imediat egalitatea 5°.

Această ultimă relație prezintă deseori interes la rezolvarea problemelor. Dacă vrem să calculăm probabilitatea unui eveniment A și observăm că raționamentul și calculele sînt mai dificile decît la calculul probabilității evenimentului contrar $\bar{A}$ calculăm mai întîi probabilitatea $P(\bar{A})$ a acestuia din urmă și apoi calculăm $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Exemplu

Care este probabilitatea ca în patru aruncări ale unui zar să obținem cel puțin o dată fața 6?

Încercînd să calculăm direct această probabilitate, vom observa că întîmpinăm unele dificultăți. Să încercăm să calculăm probabilitatea evenimentului contrar, adică să calculăm probabilitatea ca aruncînd de 4 ori un zar să nu obținem niciodată fața *6*. Numărul cazurilor posibile va fi egal cu numărul sistemelor de cîte 4 numere care se pot forma cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dacă notăm cu E mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, observăm că numărul sistemelor de 4 elemente din E este egal cu numărul elementelor mulțimii $E \times E \times E \times E = E^4$, deci cu 6^4.

Numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul sistemelor de cîte 4 elemente care se pot forma cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, deci cu 5^4. Probabilitatea căutată este deci egală cu $\frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1\,296}$.

Rezultă că probabilitatea obținerii feței *6* din patru aruncări ale zarului este $1 - \frac{625}{1\,296}$.

Observația. I În relația 4° observăm că evenimentele A și B sînt incompatibile între ele, deoarece $A \cap B = \emptyset$. Din această cauză, relația 4° exprimă următoarea

Regulă de adunare a probabilităților. Fie A și B două evenimente incompatibile între ele avînd respectiv probabilitățile p și q. Probabilitatea ca să se întîmple cel puțin unul dintre ele este $p + q$.

Observația II. În cazul cînd evenimentele sînt în număr infinit, proprietățile 1, 2, 3, 4, nu pot fi toate demonstrate, ca mai sus. Prin analogie cu ceea ce se întîmplă în cazul unui număr finit de experiențe, ele sînt admise ca *axiome.*

5. Evenimente independente

Fie A și B două evenimente. Dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

evenimentele A și B sînt, prin definiție, independente.

Exemple

1. *Considerăm experiența constînd din aruncarea a două zaruri, unul roșu și celălalt verde. Fie A evenimentul ca zarul roșu în experiență să apară cu fața* 1 *și B evenimentul ca zarul verde să apară cu fața* 5. *Sînt evenimentele A și B independente?*

Pentru a răspunde la întrebare trebuie să calculăm valoarea probabilităților $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(B)$.

Evenimentele elementare sînt (j, k), $(j = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, unde j înseamnă numărul de puncte de pe fața zarului roșu și k de pe fața zarului verde. Toate aceste evenimente sînt egal posibile.

Avem prin urmare 36 de cazuri egal posibile.

Avem un singur caz favorabil pentru $A \cap B$, și anume (1,5). Prin urmare

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Pentru A avem șase cazuri favorabile:

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6).

Deci

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pentru B avem cazuri favorabile:

(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5).

Rezultă

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Relația

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

este îndeplinită și deci evenimentele A și B sînt independente.

2. *Într-o urnă sînt patru bile numerotate de la* 1 *la* 4 *inclusiv. Extragem succesiv biletele din urnă. Fie A evenimentul, ca după ce le-am extras pe toate din urnă, biletul cu numărul* 4 *să iasă primul, iar B evenimentul ca biletul cu numărul* 1 *să apară în extracția a doua.*

Sînt evenimentele A și B independente?

Avem $4! = 24$ cazuri egal posibile, date de numărul de permutări de 4 obiecte, deoarece numerele 1, 2, 3, 4 pot ieși în cele patru extracții în toate modurile posibile.

Pentru evenimentul A avem $3! = 6$ cazuri favorabile. Ele sînt date de permutările.

(4 1 2 3), (4 2 3 1), (4 3 1 2), (4 1 3 2), (4 2 1 3), (4 3 2 1)

în care cifra 4 ocupă primul loc, iar cifrele 1, 2, 3 se permută în toate modurile posibile:

Prin urmare

$$P(A) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Pentru B, în mod analog, avem următoarele șase cazuri favorabile:

(2 1 3 4), (3 1 4 2), (4 1 2 3), (2 1 4 3), (3 1 2 4), (4 1 3 2)

și deci

$$P(B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}.$$

Pentru $A \cap B$, avem două cazuri favorabile

(4 1 2 3), (4 1 3 2).

Rezultă

$$P(A \cap B) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Cum $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$,

deoarece

$$\frac{1}{12} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

rezultă că evenimentele A și B nu sînt independente.

Deci reținem că : *evenimentele A și B sînt independente, dacă probabilitatea intersecției lor este egală cu produsul probabilităților lor.*

Despre un număr oarecare de evenimente, spunem că sînt independente, dacă probabilitatea oricărei intersecții făcute cu evenimentele respective, este egală cu produsul probabilităților evenimentelor intersectate.

Astfel, evenimentele A, B, C sînt independente, dacă avem toate egalitățile:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B),$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C),$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

6. Regula înmulțirii probabilităților

Raționamentul pe care l-am făcut la exemplul 1, pct. 5, are loc în cazul general a două evenimente A și B corespunzătoare la două experiențe, $\mathcal{E}_1$ și $\mathcal{E}_2$ care nu au nici o legătură între ele. În acest caz, numărarea cazurilor egal posibile și favorabile se face ca în exemplul 1 și putem considera evenimentele A și B independente. În consecință, *dacă însemnăm prin p probabilitatea realizării evenimentului A și prin q probabilitatea realizării evenimentului B, probabilitatea realizării evenimentului $A \cap B$ este pq.*

Exemple

1. *Urna U conține șapte bile albe și trei roșii, iar urna V trei bile albe și șapte roșii. Extragem câte o bilă din fiecare urnă. Care este probabilitatea ca ambele bile extrase să fie albe?*

Fie A evenimentul de a scoate o bilă albă din urna U. Avem 10 cazuri egal posibile, dintre care 7 sînt favorabile. Deci $p = \frac{7}{10}$.

Fie B evenimentul de a scoate o bilă albă din urna V. Avem tot 10 cazuri egal posibile, însă dintre acestea numai 3 sînt favorabile. Prin urmare

$$q = \frac{3}{10}.$$

Să observăm că, fie că am scos o bilă albă din U, fie că am scos o bilă roșie, numărul cazurilor egal posibile din urna V rămîne tot 10, iar numărul cazurilor egal posibile favorabile tot 3. La fel scoaterea unei bile albe sau roșii din urna V nu influențează condițiile de extragere a unei bile din urna U. Evenimentele A și B sînt independente și deci putem aplica regula de înmulțire a probabilităților. Probabilitatea de a scoate două bile albe este:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{21}{100}.$$

Calculul acestei probabilități se poate face și fără aplicarea teoremei înmulțirii probabilităților, însă este mai complicat.

2. *Urna U conține șapte bile albe și trei roșii, iar urna V trei bile albe și șapte roșii. Extragem mai întîi o bilă din urna U și, indiferent de culoarea ei, o punem în urna V. Extragem apoi din urna V o bilă. Care este probabilitatea ca să obținem două bile albe?*

Și aici avem de a face cu două experiențe: extragerea unei bile din prima urnă și extragerea unei bile din a doua urnă. Dar aici cele două experiențe sînt legate între ele. Rezultatele de la a doua experiență depind de cele de la prima experiență și deci nu avem dreptul să folosim regula de înmulțire a probabilităților.

Pentru rezolvarea problemei evaluăm numărul cazurilor posibile și numărul cazurilor favorabile.

Pentru a găsi numărul cazurilor posibile, să observăm că după ce am introdus o bilă în urna V putem scoate o bilă din această urnă în 11 moduri. Dar conform enunțului, bila introdusă, poate fi scoasă din urna U în 10 moduri și deci numărul căutat este $10 \times 11 = 110$.

O bilă albă poate fi scoasă din urna U în 7 moduri, iar după introducerea ei în urna V, putem scoate din această urnă o bilă albă în 4 moduri. Deci numărul cazurilor favorabile este $7 \times 4 = 28$.

Probabilitatea căutată este

$$\frac{28}{110} = \frac{14}{55}.$$

7. Cîmp de probabilitate

Mulțimea tuturor evenimentelor legate de o experiență împreună cu probabilitățile respective formează un cîmp de probabilitate.

Probabilitățile calculate se referă la evenimentele legate de experiențe avînd un număr finit de cazuri posibile (evenimente elementare), deci am avut de-a face cu cîmpuri finite de probabilitate.

Probleme rezolvate

1. *Într-o urnă sînt 6 bile, dintre care trei albe numerotate 1, 2, 3 și trei negre numerotate la fel. Să notăm cu*

A evenimentul obținerii unei bile albe;

B evenimentul obținerii unei bile negre;

$\{k\}$ evenimentul obținerii unei bile numerotate cu k ($k = 1, 2, 3$).

Folosind numai aceste evenimente și operațiile dintre ele să se scrie:

a) *evenimentul obținerii bilei albe cu numărul 3;*

b) *evenimentul obținerii unei bile albe sau a unei bile cu numărul* 1;
c) *evenimentul obținerii unei bile cu numărul* 1, *sau a unei bile cu numărul* 2.

Rezolvare. *a)* Dacă bila extrasă este albă, se realizează A, iar dacă poartă numărul 3 se realizează $\{3\}$. Evenimentul este realizat dacă sînt realizate ambele enimente de mai sus și deci îl putem scrie $A \cap \{3\}$.

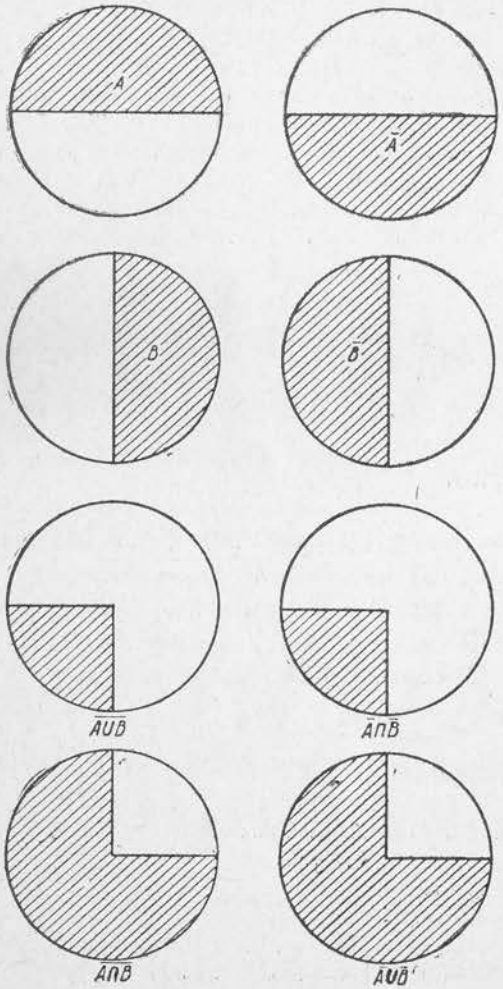

Fig. 2

b) Realizarea evenimentului constă în realizarea a cel puțin unuia din evenimentele A și $\{1\}$ și deci poate fi scris

$$A \cup \{1\}.$$

c) În acest caz, evenimentul se scrie evident, $\{1\} \cup \{2\}$. Totodată, dacă observăm că pentru a fi realizat trebuie să nu obținem bila 3, el mai poate fi scris $\overline{\{3\}}$.

2. *Să reluăm exemplul cu ținta din* pct. 7, § 1.

Să se arate cu ajutorul figurilor că

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$,

b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Rezolvare.

Avem figurile corespunzătoare evenimentelor scrise sub ele (fig. 2).

3. *Este dat un pachet de* 10 *cărți, purtînd numerele* 1, 2, ..., 10. *Care este probabilitatea ca primele două cărți să poarte numerele* 1 *și* 2 *în această ordine?*

Rezolvare. Numărul cazurilor egal posibile este numărul de feluri în care pot fi aranjate cele 10 cărți, adică $P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \ldots 10$. Dacă două cărți ocupă în pachet locuri determinate, rămîn opt cărți care pot fi aranjate în toate felurile posibile.

Rezultă că numărul cazurilor favorabile este egal cu $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \ldots 8$ și probabilitatea căutată este

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots 8}{1 \cdot 2 \ldots 9 \cdot 10} = \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{90}.$$

Probleme

Să se demonstreze folosind atît limbajul teoriei mulțimilor cît și cel al evenimentelor că

1. $\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B$.
2. $\mathbf{C}(A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B$.

Să se generalizeze cele două relații.

3. Un zar are fețele 1, 2 vopsite roșu, fețele 3, 4 vopsite galben, fețele 5, 6 vopsite albastru. Se aruncă acest zar și se notează:

A — evenimentul obținerii unei fețe roșii;

B — evenimentul obținerii unei fețe galbene;

C — evenimentul obținerii unei fețe albastre;

D — evenimentul obținerii unui număr par;

E — evenimentul obținerii unui număr impar;

$\{k\}$ — evenimentul obținerii feței cu k puncte ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Să se arate că

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} = C$;

b) $\bar{D} = E$;

c) $A \cap D = \{2\}$; $B \cap D = \{4\}$; $C \cap D = \{6\}$;
$A \cap E = \{1\}$; $B \cap E = \{3\}$; $C \cap E = \{5\}$;

d) $(A \cup B) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D) = \{2\} \cup \{4\}$.

4. O țintă este formată din 10 cercuri concentrice de raze r_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$) $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Evenimentul A_k constă în nimerirea cercului de rază r_k. Să se spună ce înseamnă evenimentele

a) $A = A_6 - A_5$*;

b) $B = A_7 - A_1$;

c) $C = \bar{A}_k$.

Să se arate că:

d) $A_k \subset A_{k+1}$ ($k = 1, 2, \ldots, 9$).

---

* Prin definiție $X - Y = X \cap \mathbf{C}Y$.

5. O persoană urmează să dea șapte telefoane la șapte numere diferite. Fiecare măr este format o singură dată. Notăm cu A evenimentul că la chemarea i nu prieşte răspuns. Cum se scriu evenimentele:

a) primește răspuns la toate chemările;

b) la cel mult o chemare nu primește răspuns;

c) la cel puțin o chemare nu primește răspuns;

d) la o singură chemare nu primește răspuns;

e) nu primește răspuns la prima chemare și la încă una din celelalte șase chemări, la celelalte cinci chemări primește răspuns;

f) nu primește răspuns cel mult la prima chemare.

6. O urnă conține n bile numerotate cu $1, 2, \ldots, n$. Notăm cu $\{Mk\}$ evenimentul la o extragere să obținem o bilă numerotată cu un multiplu de k. Să se arate că

a) $\{M\ 21\} = \{M\ 3\} \cup \{M\ 7\}$;

b) $\{M\ 10\} \cup \{M\ 6\} = \{M\ 30\}$;

c) dacă $\{Ma\} \subset \{Mb\}$, atunci b este un divizor al lui a și reciproc;

d) $\{Ma\} \cap \{Mb\} = \{M[a, b]\}$,

ude $[a, b]$ este cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b.

7. O urnă conține 10 bile albe și 6 bile negre. Din această urnă se extrag 2 bile unindu-se înapoi prima bilă extrasă.

e cere:

a) probabilitatea ca cele 2 bile să fie albe;

b) probabilitatea ca cele 2 bile să fie negre;

c) probabilitatea ca prima bilă să fie albă și a doua neagră;

d) probabilitatea ca prima bilă să fie neagră și a doua albă;

e) probabilitatea ca bilele să fie de aceeași culoare;

f) probabilitatea ca bilele să fie de culori diferite.

8. Într-un fișier sînt 10 000 de fișe. Care este probabilitatea ca numărul primei șe extrase să conțină cifra 5?

9. Din 100 mere, 10 sînt stricate. Care este probabilitatea ca scoțînd 5 mere la ntîmplare să scoatem și mere stricate?

10. Din mulțimea numerelor de 7 cifre ce se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, 6, se ia la întîmplare un număr. Care este probabilitatea ca numărul ales să conțină pe și 2 ca cifre consecutive în ordine crescătoare?

11. O urnă conține 3 bile albe și 4 bile negre. Din această urnă se scoate o bilă în locul ei se pune o bilă de cealaltă culoare și apoi se face o nouă extragere.

a) Care este probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie neagră?

b) Care este probabilitatea să obținem bile de culori diferite?

c) Care este probabilitatea ca a doua bilă să fie neagră știind că prima bilă a ost albă?

12. Se aruncă 6 zaruri. Care este probabilitatea obținerii tuturor numerelor de la 1 6? Dar probabilitatea să apară cel puțin o dată fața 5?

13. Se aruncă o monedă pînă cînd obținem deasupra fața cu stema. Care este probabilitatea să facem cel mult 3 aruncări?

14. O urnă conține α bile albe și β bile negre. Din această urnă este extrasă o bilă de culoare necunoscută. Care este probabilitatea ca la o nouă extragere să obținem o bilă albă?

15. O urnă conține 2 bile albe și 3 negre, iar o altă urnă conține 3 bile albe și 4 negre. Din fiecare urnă este extrasă cîte o bilă.

a) Care este probabilitatea obținerii a 2 bile albe?

b) Care este probabilitatea obținerii a 2 bile negre?

c) Care este probabilitatea obținerii cel puțin a unei bile albe?

d) Care este probabilitatea obținerii a 2 bile albe de aceeași culoare?

16. Păstrînd condițiile și notațiile problemei 6, să se arate că

a) $P(\{Ma\}) = \dfrac{\left[\dfrac{n}{a}\right]}{n}$,

unde prin $[\alpha]$ notăm partea întreagă a numărului α;

b) dacă n este multiplu de a, atunci probabilitatea obținerii unui număr care nu se divide la a este $\dfrac{a-1}{a}$;

c) dacă a și b sînt prime între ele și n este multiplu de a și b, atunci evenimentele $\{Ma\}$ și $\{Mb\}$ sînt independente.

2 Formule și scheme clasice de probabilitate

§ 1. Formule pentru calcularea unor probabilități

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Fie n numărul cazurilor egal posibile ale experienței în raport cu
are A și B sînt evenimente, m numărul cazurilor favorabile lui A
s numărul cazurilor favorabile lui B. Să presupunem că din cele m
azuri favorabile lui A, t sînt favorabile lui $A \cap B$.

Numărul cazurilor favorabile lui $A \cup B$ este $m + s - t$ (și nu
$+ s$, deoarece în acest caz, t cazuri ar fi numărate de 2 ori și la A
la B). Rezultă

$$P(A) = \frac{m}{n};\quad P(B) = \frac{s}{n};\quad P(A \cup B) = \frac{m+s-t}{n};\quad P(A \cap B) = \frac{t}{n}$$

deci relația

$$\frac{m+s-t}{n} = \frac{m}{n} + \frac{s}{n} - \frac{t}{n}$$

poate scrie

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

2. Relația precedentă se extinde în cazul a trei evenimente astfel

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Într-adevăr, conform relației precedente avem

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) =$$
$$= P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) -$$
$$- P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cup C) - P(B \cap C) +$$
$$P[(A \cap C) \cap (B \cap C)] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) -$$
$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Extinsă pentru n evenimente, relația se scrie

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) + \ldots +$$
$$+ P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) +$$
$$+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Demonstrația acestei relații se face prin inducție.

● **Aplicație. 1.** *O urnă conține 3 bile albe și 7 bile negre, iar alta conține 7 bile albe și 3 bile negre. Din fiecare urnă se extrage cîte o bilă. Care este probabilitatea să obținem cel puțin o bilă albă?*

Rezolvare. Fie A evenimentul extragerii unei bile albe din prima urnă și B evenimentul extragerii unei bile albe din a doua urnă. Avem de calculat probabilitatea evenimentului $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

dar

$$P(A) = \frac{3}{10};\quad P(B) = \frac{7}{10}$$

și deoarece A și B sînt independente

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{100}$$

și deci

$$P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} - \frac{21}{100} = \frac{79}{100}.$$

● **Aplicația. 2.** *Problema concordanțelor*

O urnă conține n bile numerotate 1, 2, ..., n. Se fac extracții succesive fără a pune bila înapoi în urnă. Se cere probabilitatea obținerii a cel puțin unei concordanțe (vom spune că am obținut o concordanță la extragerea k, dacă la acea extragere am obținut bila k).

Să notăm cu $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ evenimentul obținerii unei concordanțe la extrarea de rangul i.

Pentru a calcula $P(A_i)$, se observă că cele n bile pot fi luate în $n!$ moduri, dintre re $(n-1)!$ dau o concordanță de rangul i. Într-adevăr, dacă indicii 1, 2, ..., i, ... n îi scriem în toate modurile posibile, astfel ca i să nu-și schimbe locul, obținem $-1)!$ grupe, adică numărul permutărilor celorlalți $n-1$ indici. Deci

$$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_n) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Să calculăm acum probabilitatea unei intersecții de două evenimente: $A_i \cap A_j$. eoarece acum vom păstra nemișcați 2 indici, vom obține $(n-2)!$ grupe. Deci

$$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

În total avem C_n^2 intersecții de cîte 2 evenimente. Raționînd la fel obținem

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}.$$

În total avem C_n^3 intersecții de cîte 3 evenimente.

În general

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = \frac{1}{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$$

avem C_n^k intersecții de k evenimente.

Dacă notăm cu A evenimentul obținerii unei concordanțe, putem scrie

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n,$$

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

aplicînd formula demonstrată mai sus

$$P(A) = n \cdot \frac{1}{n} - C_n^2 \frac{1}{n(n-1)} + C_n^3 \frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \ldots + C_n^n \frac{(-1)^{n+1}}{n(n-1)\ldots 1}$$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Probabilitatea de a nu obține nici o concordanță este

$$1 - P(A) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}.$$

Se poate arăta că expresia din membrul al doilea al ultimei egalități tinde către $\frac{1}{e}$, cînd n tinde către infinit.

§ 2. Scheme clasice de probabilitate

1. Schema lui Poisson

Se dau n urne $U_1, U_2, \ldots, U_n$ care conțin bile albe și negre în proporții date. Cunoaștem deci probabilitățile p_i $(i = 1,2,\ldots, n)$ cu care este extrasă o bilă albă din urna U_i. Se cere probabilitatea de a extrage k bile albe și n — k bile negre, atunci cînd din fiecare urnă se extrage cîte o bilă.

Să notăm cu $q_i = 1 - p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ probabilitatea de a extrage o bilă neagră din urna U_i.

Fie $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ evenimentul de a extrage o bilă albă din urna U_i și $\overline{A}_i = \complement A_i$ evenimentul contrar al lui A_i. Evident, evenimentele A_i și $\overline{A}_i$ sînt independente în totalitatea lor.

Pentru a extrage k bile albe și $n-k$ negre, trebuie să se realizeze k evenimente A_i și $n-k$ evenimente $\overline{A}_i$. Evenimentul $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \overline{A}_{i_{k+2}} \cap \ldots \cap \overline{A}_{i_n}$ se realizează cu probabilitatea $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \ldots p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot q_{i_{k+2}} \cdot \ldots \cdot q_{i_n}$ (indicii $i_1, i_2, \ldots i_n$, reprezintă o permutare a indicilor 1, 2, ..., n). Evenimentul căruia vrem să-i calculăm probabilitatea este reuniunea tuturor evenimentelor de forma de mai sus și deci probabilitatea sa este egală cu suma tuturor produselor de forma

$$p_{i_1} \cdot p_{i_2} \ldots p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot q_{i_{k+2}} \ldots q_{i_n},$$

unde litera p apare de k ori cu diferiți indici, iar q de $n-k$ ori cu indici care nu apar la p.

Se observă ușor că după aceeași regulă se calculează coeficientul lui x^k în polinomul

$$P(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2) \dots (p_nx + q_n).$$

Schema lui Poisson ajută la rezolvarea problemelor în care se cere probabilitatea realizării de k ori a unui eveniment într-o experiență ce constă în efectuarea a n experiențe independente, atunci cînd cunoaștem probabilitatea realizării evenimentului în fiecare din cele n experiențe.

● **Aplicație.** *Într-un atelier sînt 3 mașini. Prima dă 0,9% rebuturi, a doua 1% și a treia 1,3%. Se ia la întîmplare cîte o piesă de la fiecare mașină și se cere probabilitatea ca 2 din piesele luate să fie bune și una să fie rebut.*

Sîntem în cadrul schemei lui Poisson. Probabilitatea căutată va fi coeficientul lui x^2 din produsul

$$(p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3),$$

unde

$$p_1 = 0{,}991\,;\ p_2 = 0{,}99\,;\ p_3 = 0{,}987,$$
$$q_1 = 0{,}009\,;\ q_2 = 0{,}01\,;\ q_3 = 0{,}013.$$

2. Schema lui Bernoulli

Să presupunem că în schema lui Poisson urnele $U_1, U_2, \dots, U_n$ sînt identice. Atunci putem lua

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p\,;\ q_1 = q_2 = \dots = q_n = q = 1 - p.$$

Probabilitatea extragerii a k bile albe va fi în acest caz coeficientul lui x^k din polinomul

$$P(x) = (px + q)^n.$$

adică va fi egală cu $C_n^k p^k\ q^{n-k}$. Recunoaștem în această expresie termenul general al ridicării la puterea n a binomului $p + q$. Pentru acest motiv schema se mai numește binomială.

Deoarece urnele sînt identice, putem considera că toate extragerile se fac dintr-o singură urnă, bila extrasă punîndu-se înapoi în urnă după fiecare extragere. Obținem astfel schema lui Bernoulli:

Probabilitatea de a scoate k bile albe din n extrageri dintr-o urnă, punînd de fiecare dată bila înapoi, este $P_{n,k} = C_n^k p^k\ q^{n-k}$, unde p este probabilitatea obținerii unei bile albe într-o singură extragere și $q = 1 - p$.

Schema lui Bernoulli rezolvă problemele în care se cere probabilitatea realizării unui eveniment de k ori într-o serie de n efectuări a unei experiențe, atunci cînd se cunoaște probabilitatea evenimentului la o singură efectuare a experienței.

● **Aplicația 1.** *Se aruncă o monedă de 4 ori. Se cere probabilitatea de a obține o singură dată stema.*

Avem

$$p = \frac{1}{2}\,,\ q = \frac{1}{2}\ ;\ n = 4\,;\ k = 1$$

și

$$P_{4,1} = C_4^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\,.$$

● **Aplicația 2.** *Se aruncă un zar de 5 ori. Se cere probabilitatea ca fața cu un punct să apară de 2 ori și de 3 ori să nu apară.*

Avem:

$$p = \frac{1}{6}\ ;\ q = \frac{5}{6}\ ;\ n = 5\,;\ k = 2$$

și

$$P_{5,2} = C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3\,888}\,.$$

Probleme

1. O urnă conține 10 bile numerotate cu 1,2, ..., 10. Se face o extragere la întîmplare din această urnă. Care este probabilitatea obținerii unei bile cu un număr mai mare ca 5, sau a unei bile cu un număr par?

2. Păstrînd condițiile și notațiile problemei 6 de la sfîrșitul capitolului I, să se arate că

a) $P(\{M3\} \cup \{M7\}) = P(\{M3\}) + P(\{M7\}) - P(\{M21\})$
b) $P(\{M6\} \cup \{M10\}) = P(\{M6\}) + P(\{M10\}) - P(\{M30\})$
c) $P(\{Ma\} \cup \{Mb\}) = P(\{Ma\}) + P(\{Mb\}) - P(\{M[a, b]\})$.

3. Doi trăgători trag cîte un foc asupra unei ținte. Primul nimerește ținta cu probabilitatea $\frac{7}{9}$, iar al doilea cu probabilitatea $\frac{9}{11}$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă?

4. O urnă conține 12 bile numerotate cu 1,2, ..., 12. Se face o extragere din această urnă. Care este probabilitatea obținerii sau a unui număr par, sau a unui număr mai mic ca 5, sau a unui pătrat perfect?

5. 3 trăgători trag cîte un foc asupra unei ținte, independent unul de altul. Primul nimerește ținta cu probabilitatea $\frac{3}{4}$, al doilea cu probabilitatea $\frac{4}{5}$, iar al treilea cu probabilitatea $\frac{5}{6}$. Care este probabilitatea ca ținta să fie atinsă?

6. Cu notațiile problemei 6 de la capitolul precedent să se arate că

a) $P(\{M2\} \cup \{M3\} \cup \{M5\}) = P(\{M2\}) + P(\{M3\}) + P(\{M5\}) - P(\{M6\}) - P(\{M10\}) - P(\{M15\}) + P(\{M30\})$;

b) $P(\{M6\} \cup \{M10\} \cup \{M15\}) = P(\{M6\}) + P(\{M10\}) + P(\{M15\}) - 2P(\{M30\})$;

c) $P\{(M30\} \cup \{M42\} \cup \{M70\} \cup \{M105\}) = P\{(M30\}) + P\{(M42)\} + P\{(M70\}) + P\{(M105\}) - 3P\{(M210\})$;

d) $P\{(Ma\} \cup \{Mb\} \cup \{Mc\}) = P\{(Ma\}) + P\{(Mb\}) + P\{(Mc\}) - P(M\{[a, b]\} - P(\{'M[a, c]\}) - P(\{M[b, c]\}) + (\{M[a,b,c]\})$.

Să se generalizeze ultima relație.

7. Cu notațiile de mai sus să se arate că dacă a, b, c sînt numere naturale prime între ele două cîte două atunci

a) $P(\{Ma\} \cup \{Mb\} \cup \{Mc\}) = P(\{Ma\}) + P(\{Mb\}) + P(\{Mc\}) - P(\{Mab\}) - P(\{Mac\}) - P(\{Mbc\}) + P(\{Mabc\})$.

Să se generalizeze.

b) Dacă în plus n este multiplu de a, b și c, atunci evenimentele $\{Ma\}$, $\{Mb\}$, $\{Mc\}$ sînt independente în totalitatea lor. În acest caz

$$P(\{Ma\} \cup \{Mb\} \cup \{Mc\}) = 1 - (1 - Pa)(1 - Pb)(1 - Pc),$$

unde notăm

$$P\alpha = P(\{M\alpha\})$$

pentru α natural. Să se generalizeze.

8. Într-o clasă sînt 14 băieți și 16 fete, în alta sînt 15 băieți și 15 fete, iar în a treia 18 băieți și 14 fete. Din fiecare clasă este luat la întîmplare cîte un elev. Care este probabilitatea să fie aleși doi băieți și o fată?

9. Într-o cutie sînt 4 pachete a cîte 20 țigări. În primul pachet este o țigară ruptă, în al doilea sînt 2 țigări rupte, în al treilea 3 țigări rupte, iar în al patrulea, 4. Din fiecare pachet se ia cîte o țigară. Care este probabilitatea să iasă 3 țigări bune și una ruptă? Dar probabilitatea să iasă cel puțin 3 țigări nerupte?

10. Se aruncă 2 zaruri de 10 ori. Care este probabilitatea să obținem suma 7 exact de 3 ori.?

11. Se aruncă o monedă de 8 ori. Care este probabilitatea să obținem de 4 ori stema și de 4 ori banul? Dar probabilitatea să obținem de cel puțin 4 ori stema?

12. Se aruncă un zar de 10 ori. Care este probabilitatea obținerii de 4 ori a unei fețe cu un număr mai mare de 4 puncte?

13. Se dau 4 urne: U_1 conține 3 bile albe și 4 negre, U_2 conține 2 bile albe și 5 negre, U_3 conține 5 bile albe și 2 negre, U_4 conține 4 bile albe și 3 bile negre. Din prima urnă se fac 3 extrageri punîndu-se de fiecare dată bila înapoi în urnă, iar din celelalte 3 urne se face cîte o extragere.

Care este probabilitatea obținerii sau a 2 bile albe și una neagră din prima urnă, sau a 2 bile albe și una neagră din următoarele 3 urne?

14. Să considerăm urnele U_1, U_2, U_3, U_4 avînd compozițiile U_1 — 5 bile albe, 5 negre; U_2 — 4 bile albe, 6 negre; U_3 — 4 bile albe, 5 negre; U_4 — 4 bile albe, 4 negre. Din fiecare urnă se extrag cîte 5 bile, punîndu-se bila extrasă înapoi în urnă Care este probabilitatea ca din 2 urne să obținem 2 bile albe și 3 bile negre, iar din a treia urnă să obținem altă combinație?

15. Să considerăm urnele din problema precedentă. Din fiecare urnă se extrage cîte o bile, bila extrasă punîndu-se înapoi. Dacă se efectuează de 5 ori experiența, care este probabilitatea ca de 3 ori să obținem o bilă albă și 2 bile negre?

3 Variabile aleatoare. Valori medii

§ 1. Definiția variabilei aleatoare. Exemple

În viața de toate zilele întîlnim la tot pasul mărimi care iau valori ce se schimbă sub influența unor factori întîmplători. Așa sînt, de exemplu, numărul de zile dintr-un an în care cade ploaia peste o anumită regiune, numărul băieților din 100 nou-născuți, numărul de puncte care apar la aruncarea unui zar, numărul de bile albe care apar în n extrageri dintr-o urnă care conține bile de diferite culori, printre care și bile albe, masa unui bob de mazăre luat dintr-o anumită recoltă, rezultatul obținut în urma măsurării unei mărimi fizice, viteza unei molecule de gaz etc. În capitolul de față ne interesează dintre aceste mărimi numai acelea care iau un număr finit de valori. Fiecare din mărimile de mai sus poate lua diferite valori în diversele efectuări ale experienței, chiar dacă toate condițiile rămîn neschimbate la fiecare efectuare a experienței. Modificarea valorilor are la bază factori întîmplători. De aceea vom numi aceste mărimi *variabile aleatoare (întîmplătoare)*.

Pentru cunoașterea unei variabile aleatoare trebuie să cunoaștem în primul rînd valorile pe care le poate lua. Dar cunoașterea acestor valori este departe de a fi suficientă. După cum am văzut, fiecare valoare este luată sub influența unor factori întîmplători. Deci, unele valori pot apărea mult mai des decît celelalte. Variabila aleatoare va fi mult mai bine precizată dacă vom cunoaște și probabilitatea cu care este luată fiecare valoare.

O variabilă aleatoare X o vom nota schematic:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

unde în primul rînd al tabloului am trecut valorile posibile ale variabilei și sub fiecare valoare, probabilitatea cu care X ia această valoare. Tabloul de mai sus definește *distribuția* sau *repartiția variabilei X*.

De cele mai multe ori în calcule este suficient să cunoaștem valorile pe care le ia variabila aleatoare și probabilitățile respective. Dar, în general, cunoașterea acestor date nu este suficientă pentru determinarea completă a variabilei aleatoare. Să arătăm acest lucru pe un exemplu.

Să considerăm un joc cu zarul. Se acordă celui care aruncă zarul:
1 punct dacă apare una din fețele *1* sau *2*;
2 puncte dacă apare una din fețele *3* sau *4*;
3 puncte dacă apare una din fețele *5* sau *6*.

Dacă notăm cu X numărul de puncte obținute de un jucător la o aruncare a zarului, obținem o variabilă aleatoare avînd distribuția

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Să considerăm paralel un alt joc cu care se acordă:
1 punct dacă apare una din fețele *1* sau *6*;
2 puncte dacă apare una din fețele *2* sau *5*;
3 puncte dacă apare una din fețele *3* sau *4*.

Obținem analog variabila aleatoare Y cu distribuția:

$$Y\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

În exemplul nostru, variabilele X și Y nu sînt egale, dar au aceeași distribuție. Într-adevăr, X poate să ia valoarea *3*, în timp ce Y ia valoarea 1, dacă a ieșit fața 6. Mai mult, atunci cînd una din cele două variabile ia valoarea 2, cealaltă nu poate lua aceeași valoare.

Știm că aruncarea zarului este o experiență care dă naștere la un cîmp de probabilitate. Am notat mulțimea evenimentelor elementare

prin $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Se vede că variabila X este o funcție definită pe E, care ia următoarele valori:

$$X(\{1\}) = 1; \quad X(\{2\}) = 1; \quad X(\{3\}) = 2; \quad X(\{4\}) = 2;$$
$$X(\{5\}) = 3; \quad X(\{6\}) = 3.$$

La fel:

$$Y(\{1\}) = Y(\{6\}) = 1, \quad Y(\{2\}) = Y(\{5\}) = 2, \quad Y(\{3\}) = Y(\{4\}) = 3.$$

În general, la orice variabilă aleatoare ne interesează probabilitatea ca ea să ia o anumită valoare. Dar pentru a putea vorbi de probabilitate, trebuie să avem în vedere un cîmp de probabilitate.

Vom spune deci că o variabilă aleatoare este o funcție definită pe mulțimea evenimentelor elementare ale unui cîmp de probabilitate.

Egalitățile de forma $X = x_i$ sînt *evenimente*. În exemplul de mai sus, egalitatea $X = 1$ este echivalentă cu evenimentul $\{1, 2\}$. Într-adevăr, această egalitate se realizează, dacă și numai dacă se realizează acest eveniment, cu alte cuvinte jucătorul respectiv capătă un punct, dacă și numai dacă obține una din fețele 1 sau 2. Deoarece egalitățile $X = x_1; X = x_2; \ldots; X = x_n$ sînt incompatibile două cîte două și una din ele se realizează neapărat, avem

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P(X = x_n) = 1,$$
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

§ 2. Operații cu variabile aleatoare

1. Produsul și suma dintre o constantă și o variabilă aleatoare

Dacă X este o variabilă aleatoare și a o constantă, aX este variabila care ia valoarea ax_i, atunci cînd X ia valoarea x_i, iar $a + X$ este variabila care ia valoarea $a + x_i$ cînd X ia valoarea x_i. Dacă X are distribuția.

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

aX are distribuția

$$aX\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \ldots & ax_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

iar

$$a + X\begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 & \ldots & a + x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

2. Adunarea variabilelor aleatoare

Fiind date două variabile aleatoare X și Y, vom numi suma lor variabila $Z = X + Y$, care ia valoarea $x_i + y_j$, dacă X ia valoarea x_i, iar Y ia valoarea y_j.

Dacă X și Y au respectiv distribuțiile:

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix},$$

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_n \end{pmatrix},$$

$X + Y$ are distribuția

$$X + Y\begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \ldots & x_i + y_j & \ldots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{ij} & \ldots & p_{mn} \end{pmatrix},$$

unde p_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ este probabilitatea realizării simultane a egalităților $X = x_i; Y = y_j$.

Fiind date mai multe variabile aleatoare $X, Y, \ldots, V$, suma lor se definește asemănător: $X + Y + \ldots + V$ este variabila care ia valoarea $x_i + y_j + \ldots + v_k$, dacă $X, Y, \ldots, V$ iau respectiv valorile $x_i, y_j, \ldots, v_k$.

De exemplu, fiind date 3 variabile aleatoare.

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n, \end{pmatrix},$$

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

$$Z\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_s \\ r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix},$$

putem scrie

$$X+Y+Z\begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 & x_1+y_1+z_2 & \dots & x_i+y_j+z_k & \dots & x_m+y_n+z_s \\ p_{111} & p_{112} & \dots & p_{ijk} & \dots & p_{mns} \end{pmatrix}$$

Cînd scriem tabloul de distribuție al unei variabile aleatoare este bine să avem în vedere ca valorile din primul rînd să fie diferite două cîte două.

● **Aplicație.** *Probabilitatea extragerii unei bile albe dintr-o urnă este p. Din această urnă se fac 2 extrageri, punîndu-se înapoi bila după prima extragere. Se consideră variabilele X_1 și X_2, prima reprezentînd numărul de bile albe ieșite la prima extragere și a doua numărul de bile albe ieșite la a doua extragere. Să se scrie distribuția sumei celor două variabile aleatoare.*

Evident, cele două variabile au distribuția:

$$X_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}; \qquad X_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix},$$

unde $q = 1 - p$. Conform definiției sumei variabilelor aleatoare putem scrie

$$X_1 + X_2\begin{pmatrix} 1+1 & 1+0 & 0+1 & 0+0 \\ p^2 & pq & qp & q^2 \end{pmatrix}.$$

Vom scrie

$$X_1 + X_2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ p^2 & 2\,pq & q^2 \end{pmatrix}.$$

Variabila sumă reprezintă numărul de bile albe ieșite în 2 extrageri din urnă.

3. Produsul variabilelor aleatoare

Fiind date două variabile aleatoare X și Y, vom numi produsul lor variabila XY, care ia valoarea $x_i y_j$, atunci cînd X ia valoarea x_i și Y ia valoarea y_j.

Dacă X și Y au distribuțiile

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

XY are distribuția

$$XY\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_iy_j & \dots & x_my_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix},$$

unde p_{ij} este probabilitatea realizării simultane a egalităților

$$X = x_i, \quad Y = y_j.$$

Fiind date mai multe variabile aleatoare $X, Y, \dots, V$, vom numi produsul lor variabila $X \cdot Y \cdot \dots \cdot V$, care ia valoarea $x_i y_j \dots v_k$, dacă $X, Y, \dots, V$ iau respectiv valorile $x_i, y_j, \dots, v_k$.

De exemplu, fiind date 3 variabile aleatoare

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix},$$

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

$$Z\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_s \\ r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix},$$

putem scrie

$$XYZ\begin{pmatrix} x_1y_1z_1 & x_1y_1z_2 & \dots & x_iy_iz_k & \dots & x_my_nz_s \\ p_{111} & p_{112} & \dots & p_{ijk} & \dots & p_{mns} \end{pmatrix},$$

unde p_{ijk} este probabilitatea realizării simultane a relațiilor

$$X = x_i, \quad Y = y_j, \quad Z = z_k.$$

● **Aplicație.** *Să se scrie distribuția produsului X_1X_2, unde X_1 și X_2 sînt variabilele de la aplicația din paragraful precedent.*

Folosind direct definiția produsului variabilelor aleatoare putem scrie

$$X_1X_2 \begin{pmatrix} 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 0\cdot 1 & 0\cdot 0 \\ p^2 & pq & qp & q^2 \end{pmatrix}.$$

Vom scrie deci

$$X_1X_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^2 & 2pq + q^2 \end{pmatrix}.$$

4. Ridicarea la putere a unei variabile aleatoare

Fiind dată o variabilă aleatoare X, vom numi puterea r a variabilei X variabila X' care ia valoarea x', dacă X ia valoarea x_i.

Dacă distribuția lui X este

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

distribuția variabilei X^r este

$$X^r \begin{pmatrix} x_1^r & x_2^r & \dots & x_n^r \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

5. Alte operații cu variabile aleatoare

Vom numi inversa unei variabile aleatoare X, care ia valori nenule, variabila $\frac{1}{X}$ care ia valoarea $\frac{1}{x_i}$, cînd X ia valoarea x_i.

Acesta este un caz particular al puterii unei variabile aleatoare, și anume, cazul $r = -1$.

Fiind date două variabile aleatoare X și Y, astfel ca Y să nu ia valori egale cu zero, vom numi raportul lor variabila $\frac{X}{Y}$, care ia valoarea $\frac{x_i}{y_j}$, dacă X ia valoarea x_i și Y ia valoarea y_j.

6. Variabile aleatoare independente

Am văzut că de cîte ori avem de efectuat o operație cu două variabile aleatoare X și Y, ne interesează probabilitatea realizării simultane a egalităților de forma $X = x_i$ și $Y = y_j$. Noi am notat această probabilitate cu p_{ij}. Dacă evenimentele $(X = x_i)$ și $(Y = y_j)$ sînt independente pentru toate valorile indicilor i și j, vom spune că variabilele X și Y sînt independente.

În acest caz putem scrie

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) =$$
$$= P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

sau dacă

$$P(X = x_i) = p_i \text{ și } P(Y = y_i) = q_j,$$
$$p_{ij} = p_i \cdot q_j.$$

Dacă avem mai multe variabile aleatoare $X, Y, \dots, V$, vom spune că ele sînt independente dacă toate evenimentele de forma:

$$(X = x_i), (Y = y_j), \dots, (V = v_k)$$

sînt independente în totalitatea lor.

Dacă

$$X \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \quad Z \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_s \\ r_1 & r_2 & \dots & r_s \end{pmatrix}$$

sînt variabile aleatoare independente, atunci putem scrie

$$X + Y \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \dots & x_i + y_j & \dots & x_m + y_n \\ p_1q_1 & p_1q_2 & \dots & p_iq_j & \dots & p_mq_n \end{pmatrix},$$

$$XY\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_iy_j & \dots & x_my_n \\ p_1q_1 & p_1q_2 & \dots & p_iq_j & \dots & p_mq_n \end{pmatrix},$$

$$X+Y+Z\begin{pmatrix} x_1+y_1+z_1 & x_1+y_1+z_2 & \dots & x_i+y_j+z_k & \dots & x_m+y_n+z_s \\ p_1q_1r_1 & p_1q_1r_2 & \dots & p_iq_jr_k & \dots & p_mq_nr_s \end{pmatrix} \text{ etc.}$$

Variabilele X_1 şi X_2 din aplicaţia de la punctul 2 din acest paragraf sînt independente. Într-adevăr, evenimentul $X_1 = 1$ este evenimentul obţinerii unei bile albe la prima extragere, iar $X_2 = 1$ este evenimentul obţinerii unei bile albe la a doua extragere. Noi ştim că aceste două evenimente sînt independente. La fel deducem că evenimentele $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ sînt independente etc.

§ 3. Valori medii

Definiţie. Fiind dată o variabilă aleatoare

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

vom numi valoarea medie a acestei variabile numărul

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i.$$

Exemple

Variabilele X_1 şi X_2 din aplicaţia de la punctul 2 din § 2, avînd distribuţiile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix},$$

au valoarea medie

$$1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

$X_1 + X_2$ avînd distribuţia

$$X_1 + X_2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{pmatrix}$$

are valoarea medie

$$2p^2 + 1 \cdot 2pq + 0 \cdot q^2 = 2p(p+q) = 2p.$$

Dacă luăm ca variabilă X numărul de puncte ieşite la aruncarea unui zar, distribuţia variabilei X este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

iar valoarea medie a acestei variabile este

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Să scoatem în evidenţă cîteva proprietăţi ale valorii medii.

1) *Valoarea medie a unei constante este egală cu constanta.*

Distribuţia unei variabile aleatoare care ia o singură valoare este de forma $\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ şi deci valoarea medie va fi egală cu $a \cdot 1 = a$.

2) *Dacă X este o variabilă aleatoare şi a o constantă, atunci sînt adevărate relaţiile*

a) $M(a + X) = a + M(X)$,
b) $M(aX) = aM(X)$.

Într-adevăr, fie

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

distribuţia variabilei X. Distribuţia variabilei $a + X$ este

$$a + X\begin{pmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \dots & a+x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

și media

$$(a + x_1)p_1 + (a + x_2)p_2 + \ldots + (a + x_n)p_n =$$
$$= a(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) + (p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n) =$$
$$= a + M(X).$$

Distribuția variabilei aX este

$$aX\begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 & \ldots & ax_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix};$$

ar media

$$p_1(ax_1) + p_2(ax_2) + \ldots + p_n(ax_n) = a(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_n x_n) =$$
$$= aM(X).$$

3) *Valoarea medie a unei variabile aleatoare*

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

este cuprinsă între cea mai mică și cea mai mare din valorile posibile ale variabilei.

Într-adevăr, fie a cea mai mică dintre valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și A, cea mai mare dintre aceste valori. În relația

$$M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n,$$

membrul drept se micșorează dacă înlocuim toate valorile $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ cu a:

$$M(X) > p_1a + p_2a + \ldots + p_na = (p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\, a = a.$$

Dacă înlocuim toate valorile x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ cu A membrul drept se mărește

$$M(X) < p_1A + p_2A + \ldots + p_nA = A.$$

Deci

$$a < M(X) < A.$$

4) *Valoarea medie a unei sume finite de variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii ale variabilelor aleatoare respective.*

Fie

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}, \qquad Y\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ q_1 & q_1 & \ldots & q_n \end{pmatrix}$$

două variabile aleatoare. Ne propunem să calculăm valoarea medie a variabilei $X + Y$:

$$X + Y\begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & \ldots & x_i + y_j & \ldots & x_m + y_n \\ p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{ij} & \ldots & p_{mn} \end{pmatrix}.$$

Conform definiției valorii medii putem scrie:

$$M(X + Y) = p_{11}(x_1 + y_1) + p_{12}(x_1 + y_2) + \ldots + p_{1n}(x_1 + y_n) +$$
$$+ p_{21}(x_2 + y_1) + p_{22}(x_2 + y_2) + \ldots + p_{2n}(x_2 + y_n) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ p_{m1}(x_m + y_1) + p_{m2}(x_m + y_2) + \ldots + p_{mn}(x_m + y_n).$$

Se observă în această relație că x_1 apare în toate parantezele din prima linie, x_2 în parantezele din a doua linie, ..., x_m în parantezele din a m-a linie. La fel, y_1 apare în parantezele din coloana I, y_2 în cele din coloana a II-a, ..., y_n în cele din coloana n-a. Deci, dacă vom desface parantezele și apoi vom da factor comun pe $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$, vom obține

$$M(X + Y) = x_1(p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{1n}) + x_2(p_{21} + p_{22} + \ldots +$$
$$+ p_{2n}) + \ldots + x_m(p_{m1} + p_{m2} + \ldots p_{mn}) +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ y_1(p_{11} + p_{21} + \ldots + p_{m1}) + y_2(p_{12} + p_{22} +$$
$$+ \ldots + p_{m2}) + \ldots + y_n(p_{1n} + p_{2n} + \ldots p_{mn}).$$

Să scriem această relație mai restrîns

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i(p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in}) + \sum_{j=1}^{n} y_j(p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{mj}).$$

Reamintim că prin p_{kl} am notat probabilitatea evenimentului $(X = x_k) \cap (Y = y_l)$.

Evenimentele $(Y = y_1)$, $(Y = y_2)$, ..., $(Y = y_n)$ sînt incompatibile două cîte două şi

$$(Y = y_1) \cup (Y = y_2) \cup \ldots \cup (Y = y_n) = E,$$

unde E este evenimentul sigur. Deci

$$(X = x_i) = (X = x_i) \cap E = (X = x) \cap [(Y = y_1) \cup (Y = y_2) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup (Y = y_n)],$$
$$(X = x_i) = [(X = x_i) \cap (Y = y_1)] \cup [(X = x_i) \cap (Y = y_2) \cup \ldots$$
$$\ldots \cup [(X = x_i) \cap (Y = y_n)];$$
$$p_i = P(X = x_i) = P[(X = x_i) \cap (Y = y_1)] +$$
$$+ P[(X = x_i) \cap (Y = y_2)] + \ldots + P[(X = x_i) \cap (Y = y_n)]$$

sau

$$p_i = p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in}.$$

Raţionînd la fel se poate arăta că

$$p_j = p_{1j} + p_{2j} + \ldots + p_{mj}.$$

Putem deci scrie

$$M(X + Y) = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i + \sum_{j=1}^{n} y_j p_j = M(X) + M(Y).$$

Valoarea medie a unei sume de două variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii ale celor două variabile.

Proprietatea este adevărată pentru suma unui număr finit oarecare de variabile aleatoare. Demonstraţia acestei afirmaţii se face prin recurenţă. Pentru aceasta este suficent să observăm că putem scrie

$$X + Y + Z = (X + Y) + Z.$$

Din această relaţie rezultă proprietatea pentru trei variabile aleatoare

$$M(X + Y + Z) = M(X + Y) + M(Z) = M(X) + M(Y) + M(Z).$$

În general, dacă ştim că

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n),$$

din relaţia

$$X_1 + X_2 + \ldots X_n + X_{n+1} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) + X_{n+1}$$

rezultă

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n + X_{n+1}) = M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) +$$
$$+ M(X_{n+1}) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n) + M(X_{n+1}).$$

● **Aplicaţia 1.** Să considerăm variabilele X_1 şi X_2 de la aplicaţia de la punctul 2 din §2. Am văzut că

$$M(X_1) = p, \quad M(X_2) = p.$$

Rezultă că

$$M(X_1 + X_2) = M(X_1) + M(X_2) = 2p.$$

Acest rezultat l-am găsit şi pe altă cale (la începutul acestui paragraf).

● **Aplicaţia 2.** *Se aruncă 4 zaruri. Să se calculeze valoarea medie a numărului de puncte obţinute.*

Să notăm cu X_1, X_2, X_3, X_4, respectiv numărul de puncte obţinute la primul, la al doilea, la al treilea şi la al patrulea zar. Distribuţia fiecăruia din aceste variabile aleatoare este

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Dacă notăm cu X suma numerelor de puncte ieşite pe fiecare din cele 4 zaruri, pentru a calcula valoarea medie a variabilei X este suficient să observăm că

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

De aici rezultă

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3) + M(X_4) = 14.$$

5) *Valoarea medie a unui produs finit de variabile aleatoare.* Fiind date două variabile aleatoare

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_m \end{pmatrix}, \quad Y \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ q_1 & q_2 & \ldots & q_n \end{pmatrix},$$

valoarea medie a variabilei

$$XY\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_iy_j & \dots & x_my_n \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{ij} & \dots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

este

$$\begin{aligned} M(XY) = {} & p_{11}x_1y_1 + p_{12}x_1y_2 + \dots + p_{1n}x_1y_n + \\ & + p_{21}x_2y_1 + p_{22}x_2y_2 + \dots + p_{2n}x_2y_n + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + p_{m1}x_my_1 + p_{m2}x_my_2 + \dots + p_{mn}x_my_n. \end{aligned}$$

În cazul general, această expresie nu se poate simplifica. Dacă însă variabilele aleatoare X și Y sînt independente, se produc simplificări însemnate. Știm că în acest caz putem scrie

$$p_{ij} = p_iq_j,$$

$$\begin{aligned} M(XY) = {} & p_1q_1x_1y_1 + p_1q_2x_1y_2 + \dots + p_1q_nx_1y_n + \\ & + p_2q_1x_2y_1 + p_2q_2x_2y_2 + \dots + p_2q_nx_2y_n + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + p_mq_1x_my_1 + p_mq_2x_my_2 + \dots + p_mq_nx_my_n. \end{aligned}$$

Dînd factor comun p_1x_1 în prima linie p_2x_2 în a doua, ..., p_mx_m în a m-a, rezultă

$$\begin{aligned} M(XY) = {} & p_1x_1(q_1y_1 + q_2y_2 + \dots + q_ny_n) + \\ & + p_2x_2(q_1y_1 + q_2y_2 + \dots + q_ny_n) + \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + p_mx_m(q_1y_1 + q_2y_2 + \dots + q_ny_n), \end{aligned}$$

$$M(XY) = (p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_mx_m)(q_1y_1 + q_2y_2 + \dots + q_ny_n),$$

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Valoarea medie a unui produs de două variabile aleatoare independente este egală cu produsul valorilor medii ale variabilelor considerate.

Dacă se face observația

$$XYZ = (XY)Z,$$

rezultă, pe baza unui raționament asemănător cu cel din cazul sumei, că valoarea medie a unui număr finit oarecare de variabile aleatoare independente în totalitatea lor este egală cu produsul valorilor medii ale variabilelor considerate.

● **Aplicația 1.** *Variabilele X_1 și X_2 din aplicația de la punctul* 2 din §2 *sînt independente și*

$$M(X_1) = M(X_2) = p.$$

Avem deci

$$M(X_1X_2) = p^2.$$

La același rezultat ajungem considerînd distribuția variabilei X_1X_2

$$X_1X_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^2 & 2pq + q^2 \end{pmatrix}.$$

Aplicația 2. *Să se calculeze valoarea medie a produsului numerelor de puncte care apar la aruncarea a două zaruri.*

Fie X numărul de puncte care apar la primul zar și Y, numărul de puncte care apar la celălalt zar. Dacă Z este produsul căruia vrem să-i calculăm valoarea medie, atunci

$$Z = X \cdot Y.$$

Deoarece variabilele X și Y sînt independente

$$M(Z) = M(X) \cdot M(Y).$$

Știm că $M(X) = M(Y) = \frac{7}{2}$. Deci

$$M(Z) = \frac{49}{4}.$$

§ 4. Alte valori tipice ale variabilei aleatoare

1. Momente

Fiind dată o variabilă aleatoare X, *vom numi moment de ordinul k al acestei variabile valoarea medie a variabilei X^k*. Vom scrie

$$M_k(X) = M(X^k).$$

Dacă X are distribuția

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix},$$

nci

$$M(X^k) = p_1x_1^k + p_2x_2^k + \ldots + p_nx_n^k.$$

O variabilă aleatoare care ia numai valori pozitive are momente orice ordin.

Fiind date o variabilă aleatoare X și o constantă α, *vom numi ıaterea de la constanta α a variabilei* X, *variabila* X $-$ α. *Momentul ordinul k raportat la constanta α al variabilei* X, *se definește ca valoarea ɛdie a variabilei* $(X - \alpha)^k$. Pentru $\alpha = 0$, obținem momentul ini- ıl de ordinul k, sau, scurt, momentul de ordinul k al variabilei X ɛ care l-am definit la începutul acestui paragraf. Pentru $\alpha = M(X) =$ $= m$, obținem momentul centrat de ordinul k al variabilei X. Varia- ila $X - M(X)$ se numește abaterea de la medie a variabilei X, sau, ɛurt, abaterea variabilei X.

Valoarea medie a abaterii oricărei variabile aleatoare este nulă. ntr-adevăr

$$M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

De mult ori, la o variabilă aleatoare ne interesează cît de mult se ıbat valorile variabilei de la valoarea medie. Trebuie să stabilim un ndicator numeric al împrăștierii valorilor variabilei aleatoare în urul valorii medii. Valoarea medie a abaterii de la medie nu poate caracteriza această împrăștiere, deoarece este nulă pentru orice varia- bilă aleatoare. Abaterile diferitelor valori, avînd semne diferite, se compensează reciproc. Este foarte firesc să caracterizăm împrăștierea variabilei X, prin valoarea medie a abaterii absolute $|X - M(X)|$ pe care o vom numi *abatere medie*. Dacă X are distribuția

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

atunci distribuția abaterii absolute este

$$\begin{pmatrix} x_1 - m| & |x_2 - m| & \ldots & |x_n - m| \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

unde $m = M(X)$, iar abaterea medie este

$$p_1|x_1 - m| + p_2|x_2 - m| + \ldots + p_n|x_n - m|.$$

Se observă că semnul expresiilor $x_i - m$ nu influențează valoarea abaterii medii.

Putem lua ca indicator al împrăștierii variabilei X și $M[(X - m)^2]$ sau $M[(X - m)^4]$ etc. Folosirea abaterii medii este foarte incomodă în calcule. Foarte comodă este în schimb folosirea expresiei

$$M[(X - m)^2].$$

2. Dispersia

Vom numi dispersie a unei variabile aleatoare X momentul centrat de ordinul al doilea al acestei variabile. Vom scrie

$$\sigma^2 = D^2(X) = M[(X - m)^2],$$

unde $m = M(X)$.

Dacă X are distribuția

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

atunci:

$$D^2(X) = p_1(x_1 - m)^2 + p_2(x_2 - m)^2 + \ldots + p_n(x_n - m)^2 =$$
$$= p_1(x_1^2 - 2mx_1 + m^2) + p_2(x_2^2 - 2mx_2 + m^2) + \ldots +$$
$$+ p_n(x_n^2 - 2mx_n + m^2) = (p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2) -$$
$$- 2m(p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n) + m^2(p_1 + p_2 + \ldots + p_n) =$$
$$= M(X^2) - 2m^2 + m^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Să scoatem în evidență cîteva proprietăți mai însemnate ale dispersiei.

a) *Dispersia unei constante este nulă*

$$D^2(a) = 0.$$

Este adevărată și reciproca acestei afirmații.

b) *Două variabile care diferă printr-o constantă au dispersii egale.*

Să considerăm variabila

$$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

$Y = X + a$, care are distribuția:

$$Y\begin{pmatrix} x_1 + a & x_2 + a & \dots & x_n + a \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix};$$

m că

$$m' = M(Y) = M(X) + a = m + a,$$

$$D^2(Y) = p_1(x_1 + a - m')^2 + p_2(x_2 + a - m')^2 + \dots +$$
$$+ p_n(x_n + a - m')^2 = p_1(x_1 + a - m - a)^2 +$$
$$+ p_2(x_2 + a - m - a)^2 + \dots + p_n(x_n + a - m - a)^2 =$$
$$= p_1(x_1 - m)^2 + p_2(x_2 - m)^2 + \dots + p_n(x_n - m)^2 = D^2(X).$$

c) *Dispersia produsului dintre o constantă și o variabilă aleatoare te egală cu produsul dintre pătratul constantei și dispersia variabilei*

$$D^2(aX) = a^2D^2(X).$$

d) Una din cele mai importante proprietăți ale dispersiei este rmătoarea: *dispersia unei sume finite de variabile aleatoare independente este egală cu suma dispersiilor variabilelor adunate*

$$D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n),$$

acă $X_1, X_2, \dots, X_n$ sînt independente în totalitatea lor.
Să notăm

$$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Am văzut că

$$D^2(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2,$$

$$D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)^2] -$$
$$- [M(X_1 + X_2 + \dots + X_n)]^2 = M(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 +$$
$$+ 2X_1X_2 + \dots + 2X_{n-1}X_n) - [M(X_1) + M(X_2) + \dots +$$
$$+ M(X_n)]^2 = M(X_1^2) + M(X_2^2) + \dots + M(X_n^2) +$$
$$+ 2M(X_1)M(X_2) + \dots + 2M(X_{n-1})M(X_n) - [M(X_1)]^2 -$$
$$- [M(X_2)]^2 - \dots - [M(X_n)]^2 - 2M(X_1)M(X_2) - \dots -$$
$$- 2M(X_{n-1})M(X_n) = M(X_1^2) + M(X_2^2) + \dots + M(X_n^2) -$$
$$- [M(X_1)]^2 - [M(X_2)]^2 - \dots - [M(X_n)]^2 =$$
$$= [M(X_1^2) - (M(X_1))^2] + [M(X_2^2) - (M(X_2))^2] + \dots + [M(X_n^2) -$$
$$- (M(X_n))^2] = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n).$$

De obicei, *gradul de împrăștiere al unei variabile aleatoare X se exprimă nu prin dispersie, ci prin abaterea medie pătratică $D(X)$ dată de relația*

$$\sigma = D(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{M(X^2) - [M(X)]^2}.$$

Aceasta are avantajul că se exprimă prin aceleași unități de măsură ca și valorile variabilei X. Proprietățile mai importante ale abaterii medii pătratice sînt:

$D(a) = 0$, dacă a este o constantă;

$D(X + a) = D(X)$;

$D(aX) = aD(X)$.

Aceste proprietăți le are și trebuie să le aibă orice mărime menită să măsoare gradul de împrăștiere, ele exprimînd proprietăți intuitive ale gradului de împrăștiere. În plus, abaterea medie pătratică are proprietatea că dacă

$$\sigma_1 = D(X_1); \quad \sigma_2 = D(X_2); \dots; \quad \sigma_n = D(X_n),$$

unde $X_1, X_2, \dots X_n$, sînt variabile aleatoare independente, atunci

$$\sigma = D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}.$$

Probleme

1. Se aruncă două zaruri și se notează cu S numărul total de puncte care apar. Să se formeze tabloul distribuției lui S.

2. Se aruncă două zaruri. Se acordă 12 puncte dacă suma fețelor care apar este 2 sau 12; 4 puncte dacă această sumă este 7 și 1 punct pentru celelalte cazuri. Să se scrie distribuția numărului N de puncte acordat celui care aruncă zarul.

3. În condițiile problemelor 1 și 2 să se facă tabloul pentru $S + 1$ și pentru $2N$

4. Se dă variabila aleatoare

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Să se facă tabloul pentru $X^n (n \in N)$.

5. Se dau variabilele

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix};\quad Y\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Să se facă tabloul de distribuție pentru X^n și $Y^n (n \in N)$.

6. Distribuția variabilei X este

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p^2 & \frac{7}{4}p & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Care este probabilitatea ca X să ia o valoare < 3?

7. Să se scrie tabloul de distribuție al sumei variabilelor aleatoare independente

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},\quad Y\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

8. Dacă variabilele de la problema 5 sînt independente ce distribuție are suma tratelor lor?

9. Ce distribuție are suma variabilelor aleatoare independente

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p^2 & \frac{5}{3}p & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad Y\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ q^2 & \frac{8}{5}q & \frac{1}{6} & \frac{1}{30} \end{pmatrix}.$$

Dar produsul lor?

10. Se dau variabilele aleatoare independente

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p+\frac{1}{6} & q+\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\quad Y\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p-q & 12p^2 \end{pmatrix}.\quad (a \neq 0;\ a \neq 1)$$

Să se scrie distribuția variabilei $X + Y$. Pentru ce valoare a lui a avem

$$P(X + Y = 0) > \frac{2}{9}?$$

11. Variabila X are distribuția

$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Să se scrie repartițiile variabilelor $X + X^2$ și $X + X^3$.

12. Să se calculeze valoarea medie a variabilelor care apar în problemele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9.

13. Variabila X are distribuția

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $[M(X)]^2$, $M(X^2)$, $M(X-1)$, $M(X^2 - 2X)$.

14. Să se calculeze valoarea medie a numărului de puncte ce se obțin la aruncarea a 2 zaruri. Să se rezolve problema folosind și rezultatul problemei 1.

15. Să se calculeze valoarea medie a numărului total de puncte care apar la aruncarea a 6 zaruri.

16. Să se calculeze valoarea medie a variabilelor

$$X\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \frac{1}{2^{n-1}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \dots & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.$$

$$Y\begin{pmatrix} \frac{1}{1\cdot 2} & \frac{1}{2\cdot 3} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

17. Să se calculeze dispersiile variabilelor aleatoare care apar în problemele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

18. Fie X o variabilă aleatoare cu media m și dispersia σ^2. Să se calculeze valoarea medie și dispersia variabilei

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

19. Să se calculeze dispersia numărului total de puncte care apar la aruncarea a șase zaruri.

20. Se consideră variabila

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

să se afle α_1 și α_2, astfel ca variabila

$$Y = \alpha_1 X + \alpha_2$$

să aibă media 0 și dispersia 1.

21. Se dau variabilele independente

$$X\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & p & q \end{pmatrix} \quad Y\begin{pmatrix} a+1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3}-q & p \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze a astfel ca variabila $X - Y$ să aibă dispersia egală cu $\frac{4}{9}$.

22. O țintă este formată din 4 cercuri concentrice. De la distanța de unde se ... un trăgător nimerește în interiorul celui mai mic cerc cu probabilitatea 0,05 și ...ește în acest caz 40 de puncte, în coroana dintre cel mai mic cerc și cel de-al ...a nimerește cu probabilitatea 0,2 și primește 10 puncte, în coroana următoare ...robabilitatea 0,3 și primește 6 puncte, în ultima coroană nimerește cu probabilitatea ...și primește 5 puncte. Dacă trage în afara celui mai mare cerc nu primește nici un ...t. Să se facă tabloul distribuției numărului de puncte obținute de trăgător ... trage un foc. Dacă trăgătorul trage 3 focuri, să se calculeze valoarea medie și dis... ...ia numărului de puncte obținute.

4 Elemente de statistică matematică

§ 1. Noțiunile de bază ale statisticii matematice

1. Populație statistică. Caracteristică

Statistica matematică se ocupă cu gruparea, analiza și interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen, precum și cu unele previziun privind producerea lui viitoare.

În cadrul analizei statistice a unui fenomen acționează mai întîi statistica descriptivă care se ocupă cu culegerea datelor asupra fenomenului respectiv și cu înregistrarea acestor date apoi intervine statistica matematică, care grupează datele, le analizează și le interpretează în vederea unor predicții privind comportarea viitoare a fenomenului.

Vom numi *populație statistică* orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice.

Elementele unei populații statistice se numesc *unități statistice* sau *indivizi.*

Trăsătura comună tuturor unităților unei populații care ne interesează în cadrul analizei statistice se numește *caracteristică.*

Analiza statistică se poate face după una sau mai multe caracteristici.

Exemple

a) Dacă ne interesează rezultatele obținute, la teză la matematică, de elevii din anul IV a unui liceu, atunci:

— mulțimea tuturor elevilor anului IV din acel liceu formează ulația statistică ;
— fiecare elev din anul IV al acestui liceu este o unitate istică ;
— nota la teza la matematică este caracteristica studiată.
b) Dacă ne interesează numărul locuitorilor din fiecare oraș al i la o anumită dată, atunci :
— mulțimea tuturor orașelor țării la data respectivă formează ulația statistică ;
— fiecare oraș constituie o unitate statistică ;
— numărul de locuitori la data respectivă este caracteristica studiată.
c) Dacă ne interesează diametrul unor piese de același fel fabricate -o întreprindere dată, atunci :
— mulțimea pieselor fabricate de întreprindere este populația tistică ;
— o piesă constituie o unitate statistică ;
— diametrul piesei este caracteristica studiată.
d) Dacă ne interesează distribuția unui grup de copii după culoarea ilor și culoarea părului, atunci
— mulțimea copiilor grupului considerat formează populația tistică,
— fiecare copil în parte din grupul respectiv este o unitate statistică,
— culoarea ochilor și culoarea părului sînt caracteristicile care ne teresează.

Se pot da nenumărate alte exemple de mulțimi care pot constitui biectul unei analize statistice : distribuția unui grup de persoane după lie, vîrstă și distribuția orașelor după numărul de salariați, distribuția cardiacilor printre fumători etc.

Din însăși exemplele date rezultă existența a două feluri de caracteristici.

O caracteristică se numește *cantitativă* dacă se poate măsura. În caz ontrar, caracteristica se numește *calitativă*.

Nota la teză, numărul de locuitori, diametrul piesei, vîrsta, talia, alariul lunar etc. sînt exemple de caracteristici cantitative. Între ceste caracteristici distingem unele care pot lua numai valori întregi numărul de locuitori al unui oraș, numărul de copii dintr-o familie,

numărul cîștigătorilor la loto într-un oraș etc.). Aceste caracteristici se numesc *discrete* sau *discontinue*.

O caracteristică care poate lua orice valoare dintr-un interval finit sau infinit se numește *continuă*.

Este cazul taliei, greutății, lungimii firului de păr la oi etc. Culoarea părului, culoarea ochilor, sexul, profesia etc. sînt exemple de caracteristici calitative.

2. Gruparea datelor

Să presupunem că s-a măsurat înălțimea unui grup de 120 de persoane. Rezultatele obținute (înălțimea în centimetri) sînt date în tabela 1, în ordinea în care ele au apărut.

Tabela 1

176	173	161	171	174	168	178	166	169	172
181	172	163	174	173	169	172	175	158	182
186	190	173	173	169	171	176	172	188	175
162	170	176	177	171	164	162	175	176	176
170	176	178	164	174	177	180	175	175	180
174	171	175	170	179	186	177	178	169	180
188	173	172	174	183	177	176	174	181	159
183	174	179	167	165	182	176	178	171	169
168	179	177	177	181	178	184	177	173	177
162	177	173	170	176	179	170	168	174	175
173	178	185	185	171	165	167	174	175	172
179	168	171	175	165	178	172	175	166	171

Este clar că sub această formă, tabela nu ne permite să tragem prea multe concluzii cu caracter mai general. De aceea, este necesar să facem o grupare a acestor date. O primă posibilitate de grupare este aceea din tabela 2.

Tabela 2

cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.	cm	Nr. pers.
158	1	165	3	171	8	177	9	183	2
159	1	166	2	172	7	178	7	184	1
161	1	167	2	173	8	179	5	185	2
162	3	168	4	174	9	180	3	186	2
163	1	169	5	175	10	181	3	188	2
164	2	170	5	176	9	182	2	190	1

Aceasta este o tabelă cu două coloane, dar a fost astfel prezen-
deoarece are foarte multe linii. În prima coloană este înălțimea
entimetri, iar în coloana a doua numărul de persoane care au această
țime. Sub această formă, tabela ne permite să tragem unele con-
ii: înălțimea căreia îi corespunde cel mai mare număr de per-
ne este 175 cm, înălțimilor apropiate de 175 cm le corespund un
măr mai mare de persoane, decît celor mai depărtate etc.

În tabela 3, sînt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase
teza de matematică.

Tabela 3

Nota	Nr. elevi	Nota	Nr. elevi
2	1	7	15
3	1	8	6
4	2	9	3
5	4	10	1
6	7		

Din această tabelă putem trage concluzii referitoare la nivelul la
re s-a prezentat clasa respectivă la teza de matematică.

Din aceste exemple rezultă că analiza statistică a unui fenomen, în
port cu o singură caracteristică ne conduce la o serie de perechi de
lori, pe care o vom numi serie statistică. În exemplele noastre este
rba de perechi de numere, primul număr al unei perechi reprezentînd
loarea caracteristicii (înălțimea în centimetri, nota la teză), iar cel
-al doilea număr reprezentînd numărul de unități statistice cores-
nzătoare acelei valori a caracteristicii (numărul de persoane, numărul
elevi).

În cazul caracteristicilor calitative, prima valoare a unei perechi nu
ai este numerică.

În tabela 4 este prezentată împărțirea unui grup de 1 500 de per-
ane după culoarea ochilor.

Tabela 4

Culoarea ochilor	Nr. persoane
negri	240
căprui	752
verzi	302
albaștri	206
	1 500

După cum se vede, în acest caz, caracteristica ia patru valori: negru, căprui, verde, albastru, care nu sînt valori numerice. Dacă împărțim un grup de persoane după prenume, atunci caracteristica ia una din valorile: Ion, Gheorghe, Maria etc., iar în tabelă, în dreptul fiecărui nume trecem numărul de persoane care poartă acest nume.

În acest capitol, ne vom ocupa cu precădere, de serii cu caracteristici cantitative.

Atunci cînd analiza statistică a unei populații se face după două caracteristici, rezultatele obținute se trec într-o tabelă cu dublă intrare. Astfel, în tabela 5 este redată distribuția unui număr de 1 500 de copii după culoarea ochilor și culoarea părului.

Tabela 5

Culoarea ochilor / Culoarea părului	negri	căprui	verzi	albaștri	total
negru	145	285	30	11	471
castaniu	62	431	87	67	647
blond	33	36	185	128	382
Total	240	752	302	206	1 500

Din această tabelă reiese că au fost găsiți 87 de copii cu ochii verzi și păr castaniu, 33 de copii cu ochi negri și păr blond, 11 copii cu ochi albaștri și păr negru etc.

În cazul seriilor statistice cu o singură caracteristică, pentru obține- cu ușurință a unor concluzii generale asupra fenomenului studiat, ɔelele cu două coloane, așa cum au fost ele prezentate mai sus, sînt ficiente, dacă numărul valorilor pe care le ia caracteristica este în de 20.

Cînd acest număr este depășit, citirea tabelei devine greoaie, fiind ea voluminoasă. Este cazul tabelei 1. În această situație se impune nouă grupare a datelor. Revenind la tabela 1, împărțim mulțimea lorilor caracteristicii în clase, după cum reiese din tabela 6

Tabela 6

Clase de valori, în centimetri	Nr. persoane
<160	2
160—165	7
165—170	16
170—175	37
175—180	40
180—185	11
185—190	7
	120

La aceste tabele facem convenția ca extremitatea dreaptă a iecărei clase (cu excepția, eventual a ultimei clase) să nu aparțină lasei. Astfel, clasa 165—170 cuprinde valorile x ale caracteristicii, ɔentru care $165 \leqslant x < 170$.

În cazul pe care l-am prezentat, intervalele reprezentînd clasele le valori au aceeași lungime. De la această regulă putem excepta, eventual clasele extreme (prima și ultima). Lungimile acestor intervale ıu este impusă de vreo regulă fixă, ea fiind la îndemîna statisticianului, are caută ca împărțirea în intervale să fie cît mai judicioasă. Acest nod de realizare a tabelelor (cu clase de valori de amplitudini egale sau ıu) se impune totdeauna în cazul caracteristicilor continue. În tabela 7 este dată repartiția elevilor unei școli după înălțime.

Tabela 7

Talia, în centimetri	Nr. elevi
150—154	38
154—158	65
158—162	175
162—166	189
166—170	111
peste 170	62
	640

Aici lungimea intervalelor alese (amplitudinea claselor) este de 4 cm.

3. Frecvența absolută. Frecvența relativă. Frecvențe cumulate

Numărul tuturor elementelor unei populații statistice se numește efectivul total al acelei populații.

Astfel, în tabela 7, populația este mulțimea elevilor unei școli și are un efectiv total de 640 de elevi.

Se numește frecvență absolută, a unei valori x a caracteristicii, numărul de unități ale populației corespunzătoare acelei valori. De exemplu, în tabela 2, valoarea 179 cm a caracteristicii are frecvența absolută egală cu 5, iar în tabela 3, nota 5 are frecvența absolută egală cu 4.

Este clar, că suma frecvențelor absolute ale tuturor valorilor caracteristicii este egală cu efectivul total al populației.

Se numește frecvență relativă (sau pe scurt, frecvență) a unei valori x a caracteristicii, raportul dintre frecvența absolută a valorii x și efectivul total al populației. Vom scrie

$$f(x) = \frac{n_x}{n},$$

unde $f(x)$ este frecvența relativă a valorii x, n_x este frecvența absolută a acestei valori, iar n efectivul total al populației.

Deseori, frecvența este dată în procente.

În tabela 2, frecvența relativă a valorii 179 este $\frac{5}{120} = \frac{1}{24}$, a valorii 175, $\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ etc., iar în tabela 3, frecvența valorii 5 este $\frac{4}{40} = 10\%$ etc.

În tabelele statistice cu două coloane putem înlocui în coloana a doua frecvențele absolute prin frecvențele relative. Astfel, tabela 3, care înfățișează rezultatele obținute la teza de matematică de către o clasă compusă din 40 de elevi, poate fi scrisă ca în tabela 8.

Tabela 8

Nota	Frecvența
2	0,025
3	0,025
4	0,050
5	0,100
6	0,175
7	0,375
8	0,150
9	0,075
10	0,025

Deci, în cazul caracteristicilor cantitative, aceste tabele scot în evidență o corespondență între două mulțimi de numere: mulțimea valorilor caracteristicii și mulțimea frecvențelor corespunzătoare. Se poate remarca analogia cu distribuția variabilelor aleatoare. Dacă distribuția unei variabile aleatoare o scriem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

unde pe prima linie sînt trecute valorile variabilei, iar în cea de-a doua linie probabilitățile corespunzătoare acestor valori, tabela corespunzătoare unei caracteristici cantitative o scriem ca în tabela 9.

Tabela 9

Valoarea	Frecvența
x_1	f_1
x_2	f_2
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

În prima coloană sînt trecute valorile caracteristicii, iar în cea de-a doua frecvențele corespunzătoare.

De altfel, noțiunile de variabilă aleatoare și probabilitate sînt modelele teoretice ale noțiunilor de caracteristică și respectiv frecvență care sînt noțiuni cu caracter experimental.

De multe ori, în loc de caracteristică se spune *variabilă statistică*, sau pe scurt *variabilă* și noi vom folosi în cele ce urmează și această denumire.

Vom spune că o tabelă de genul tabelei 9 definește distribuția sau repartiția statistică a variabilei respective.

Este ușor de observat că suma frecvențelor relative ale tuturor valorilor variabilei este 1.

Se numește frecvență absolută cumulată crescătoare a unei valori x a variabilei suma frecvențelor absolute ale tuturor valorilor variabilei care apar pînă la x inclusiv.

Se numește frecvență absolută cumulată descrescătoare a unei valori x a variabilei suma frecvențelor absolute ale tuturor valorilor care apar de la x inclusiv (în cazul caracteristicilor cantitative vom considera de aici înainte numai tabele în care valorile variabilei sînt scrise în ordine crescătoare):

Astfel, frecvența absolută cumulată crescătoare a valorii 6 din tabela 3 este 15, iar frecvența absolută cumulată descrescătoare a aceleiași valori este 32; pentru valoarea 9 a aceleiași variabile, cele două frecvențe sînt respective 4 și 39.

În mod analog, definim frecvența relativă (sau scurt, frecvența) cumulată crescătoare și frecvența cumulată descrescătoare.

Se numește frecvență cumulată crescătoare a unei valori x a variabilei, suma tuturor frecvențelor valorilor care apar pînă la x inclusiv, iar frecvență cumulată descrescătoare suma tuturor frecvențelor valorilor care apar de la x inclusiv.

Rezultă că frecvența cumulată crescătoare este exprimată și de raportul dintre frecvența absolută cumulată crescătoare și efectivul total al populației, iar frecvența cumulată descrescătoare de raportul dintre frecvența absolută cumulată descrescătoare și efectivul total al populației.

În cele ce urmează, *prin frecvență cumulată vom înțelege frecvența relativă cumulată crescătoare.* Este ușor de observat că frecvența cumulată are ca model teoretic funcția de repartiție. O tabelă statistică poate fi completată cu aceste frecvențe. Tabela 3 completată devine tabela 10.

Tabela 10

Nota	Frecvența absolută	Frecvența relativă	Frecvența absolută cumulată descrescătoare	Frecvența absolută cumulată crescătoare	Frecvența cumulată descrescătoare	Frecvența cumulată crescătoare
2	1	0,025	40	1	1	0,025
3	1	0,025	39	2	0,975	0,050
4	2	0,050	38	4	0,950	0,100
5	4	0,100	36	8	0,900	0,200
6	7	0,175	32	15	0,800	0,375
7	15	0,375	25	30	0,625	0,750
8	6	0,150	10	10	0,250	0,900
9	3	0,075	4	39	0,100	0,975
10	1	0,025	1	40	0,025	1

Observație. Frecvența absolută cumulată crescătoare (descrescătoare) a valorii ne dă numărul de unități corespunzătoare valorilor strict mai mici (mai mari) sau egale cu ea. Astfel, numărul din linia a 5-a și coloana a 5-a a tabelei 10 ne spune că există 15 elevi cu note mai mici sau egale cu 6 (deci cu note de 2, 3, 4, 5, 6). Pe aceeași tabelă citim că există 30 de elevi cu note mai mici ca 8, sau 10 elevi cu note mai mari decît 7 etc. Putem interpreta, de asemenea, datele din coloanele 6 și 7. Astfel putem spune că 0,1 = 10% din elevi au note mai mici decît 5 (deci note de 2, 3, 4), că 0,1 = 10% au note mai mari decît 8 (deci 9 și 10), că 0,2 = 20% au note mai mici ca 6 etc.

Noțiunile introduse în raport cu valorile individuale ale variabilei pot fi extinse și la cazul tabelelor cu clase de valori. Astfel, frecvența absolută a unei clase este numărul de unități corespunzătoare valorilor variabilei care aparțin clasei respective, iar frecvența relativă (frecvența) unei clase este raportul dintre frecvența sa absolută și efectivul total al populației. Astfel din tabela 6, rezultă că frecvența absolută a clasei 160—165 este 7, iar frecvența sa relativă este $\frac{7}{120}$.

Se numește frecvență absolută cumulată crescătoare a unei clase suma frecvențelor absolute ale tuturor claselor care apar pînă la clasa considerată inclusiv.

Se numește frecvență absolută cumulată descrescătoare a unei clase suma frecvențelor absolute a tuturor claselor care apar de la clasa considerată inclusiv.

Completînd cu aceste frecvențe tabela 6 obținem tabela 11.

Tabela 11

Clasa de valori	Frecvența absolută	Frecvența absolută cumulată crescătoare	Frecvența absolută cumulată descrescătoare
<160	2	2	120
160—165	7	9	118
165—170	16	25	111
170—175	37	62	95
175—180	40	102	58
180—185	11	113	18
185—190	7	120	7

Cum se face citirea unei astfel de tabele?

Frecvența absolută cumulată crescătoare a unei clase ne dă numărul de unități corespunzătoare valorilor mai mici (strict) decît limita superioară a intervalului, iar frecvența absolută cumulată descrescătoare ne dă numărul unităților corespunzătoare valorilor mai mari (sau egale) cu limita inferioară a intervalului. Astfel din tabela 11 rezultă că dintre persoanele măsurate 62 sînt mai scurte de 175 cm; 95 persoane au cel puțin 170 cm înălțime etc.

Frecvența relativă cumulată crescătoare (frecvența cumulată) a unei clase este suma frecvențelor claselor care apar pînă la clasa considerată, *inclusiv* sau, ceea ce este totuna, raportul dintre frecvența absolută cumulată crescătoare și efectivul total al populației. În mod analog se definește frecvența relativă cumulată descrescătoare a unei clase.

Din tabela 11 rezultă că frecvența cumulată a clasei 175—180 este $\frac{102}{120} = 0{,}85 = 85\,\%$. Vom spune că 85 % din persoanele măsurate au înălțimea sub 180 cm. Frecvența cumulată descrescătoare a clasei 165—170 este 0,925, deci 92,5 % din persoanele considerate au înălțimea de cel puțin 165 cm.

4. Serii cronologice

Tot în cadrul seriilor statistice sînt incluse și așa-numitele *serii cronologice* care prezintă evoluția în timp a unor mărimi.

În cazul unei tabele corespunzătoare unei serii cronologice, în prima coloană sînt trecute anumite momente sau intervale de timp, iar în coloana a doua valorile corespunzătoare ale mărimii considerate. Astfel să presupunem că se măsoară temperatura apei unui lac într-un anumit punct, în fiecare an la 15 iulie ora 12^{00}, iar rezultatele obținute sînt trecute în tabela 12.

Tabela 12

Data	Temperatura, în °C
15 iulie 1960	20
15 iulie 1961	22
15 iulie 1962	19
15 iulie 1963	18
15 iulie 1964	20
15 iulie 1965	20
15 iulie 1966	21
15 iulie 1967	20

În coloana stîngă avem trecute momente precise de timp, spre deosebire de tabela 13, unde avem trecute în coloana stîngă intervale de timp.

Tabela 13

NUMĂRUL ABSOLVENȚILOR UNEI ȘCOLI

1950—1954	1 000
1955—1959	997
1960—1964	1 002
1964—1968	1 018

(În tabelele 12 și 13 datele sînt imaginare.)

§ 2. Reprezentarea grafică a seriilor statistice

În acest paragraf ne vom ocupa de reprezentarea grafică a seriilor statistice cu o singură caracteristică. Reprezentarea grafică a unei serii este uneori foarte sugestivă, ea contribuind la o primă interpretare intuitivă, pe cale vizuală a datelor. Deseori reprezentarea grafică sugerează însăși legea pe care o urmează fenomenul studiat.

1. Reprezentarea grafică a seriilor cu caracteristică calitativă

Reprezentarea acestor distribuții constituie un capitol deosebit de important al reprezentării grafice, dat fiind că ilustrează, prin desene, anumite rapoarte numerice. Graficul corespunzător poartă numele de *diagramă*.

Să considerăm de exemplu distribuția investițiilor pe ramuri ale economiei naționale în anii 1966—1970 (tab. 14).

Tabela 14

Total investiții:	100%
Industrie	57,4%
Agricultură	13,1%
Transporturi și telecomunicații	11,8%
Gospodărie comunală și locuințe	8,7%
Învățămînt, cultură și sănătate	3,5%
Celelalte ramuri	5,5%

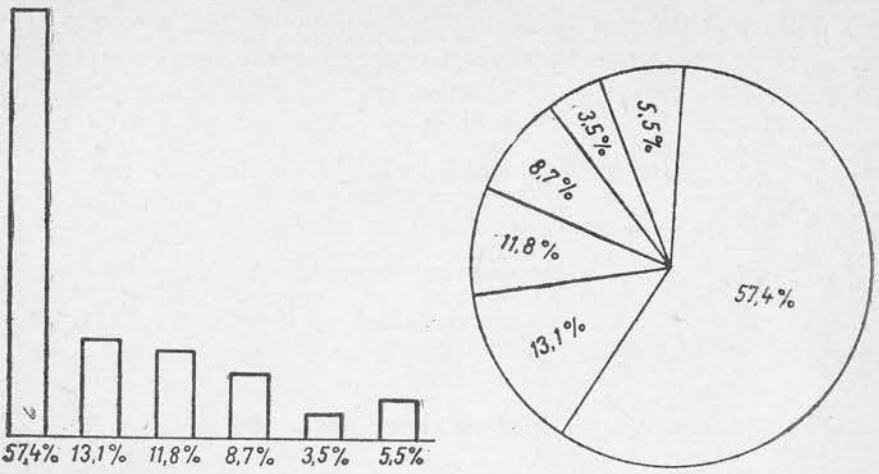

Fig. 3.

Datele pot fi reprezentate prin dreptunghiuri de baze egale și cu înălțimi proporționale cu procentele sau prin sectoare de cerc, cu unghiurile proporționale cu aceleași numere (fig. 3).

2. Reprezentarea seriilor cu caracteristică cantitativă

Seriile cu caracteristică cantitativă se reprezintă grafic în raport cu un sistem de axe rectangulare. Alegerea unității pe fiecare dintre axe este la îndemîna statisticianului, care are grijă ca alegerea să ușureze obținerea concluziilor dorite, cît și ca desenul să rămînă în cadrul hîrtiei.

a) *Reprezentarea în batoane.* Această reprezentare se folosește mai ales pentru seriile în care variabila ia un număr mic de valori.

Să considerăm datele din tabela 15.

Tabela 15

DISTRIBUȚIA FAMILIILOR DINTR-UN BLOC DUPĂ NUMĂRUL COPIILOR

Nr. de copii	Frecvența absolută
0	6
1	18
2	23
3	20
4	14
5	6
6	2
7	1

Obținem reprezentarea în batoane din figura 4.

Deci pe axa orizontală sînt trecute punctele reprezentînd valorile variabilei și din aceste puncte se ridică segmente verticale de lungime egală cu frecvența absolută, sau relativă a valorii respective. Segmentele ridicate sînt măsurate cu unitatea de pe Oy.

b) *Histogramă.* Fiind dată o serie cu clase de valoare de amplitudini egale obținem histograma acestei serii, luînd pe axa orizontală o succesiune de segmente egale (reprezentînd amplitudinea claselor, și

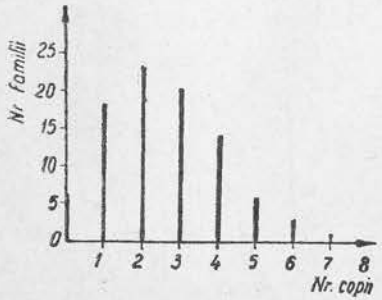

Fig. 4.

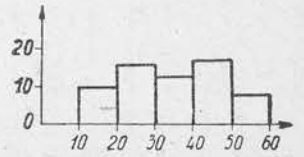

Fig. 5.

ridicînd, pe fiecare din aceste segmente considerate ca baze, dreptunghiuri de înălţimi proporţionale cu frecvenţele (relative sau absolute) ale claselor respective.

Histograma corespunzătoare seriei din tabela 16 este dată în figura 5.

Tabela 16

DISTRIBUŢIA UNOR PIESE DUPĂ DIAMETRUL LOR

Mărimea diametrului mm	Frecvenţa absolută	Frecvenţa cumulată
10—20	10	10
20—30	15	25
30—40	12	37
40—50	15	52
50—60	8	60

Histograma corespunzătoare tabelei 11 este dată în figura 6.

c) Dacă din mijlocul fiecărui segment de pe axa orizontală ridicăm segmentele proporţionale cu frecvenţele claselor corespunzătoare fiecărui segment şi unim printr-o linie poligonală extremităţile superioare ale acestor segmente obţinem poligonul frecvenţelor. Astfel, poligonul frecvenţelor corespunzător tabelei 16 este dat în figura 7.

d) Dacă aceleaşi puncte de la alineatul precedent le unim nu printr-o linie poligonală, ci printr-o curbă, obţinem curba de distribuţie a seriei respective.

Poligonul frecvenţelor cumulate (crescătoare) se obţine unind printr-o linie poligonală punctele (x, y), unde x este extremitatea

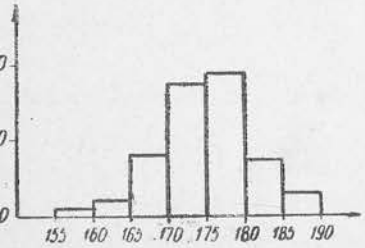

Fig. 6

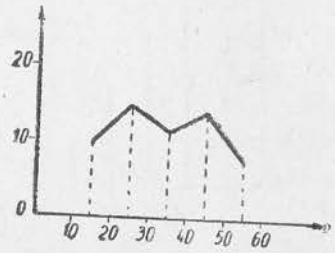

Fig. 7.

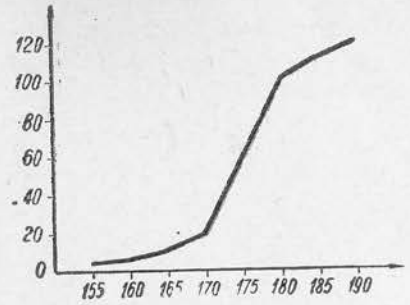

Fig. 8.

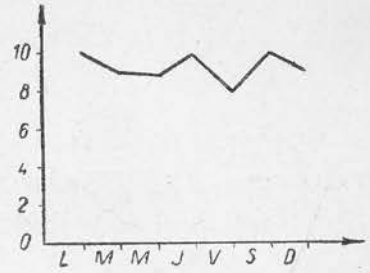

Fig. 9.

dreaptă a intervalului unei clase, iar y frecvenţa cumulată a clasei respective, la care mai adăugăm punctul $(0, a)$, unde a este limita inferioară a primei clase.

Astfel, poligonul frecvenţelor cumulate corespunzător tabelei 11 este dat în figura 8.

În mod analog se defineşte curba frecvenţelor cumulate descrescătoare. Dacă punctele din figură le unim nu printr-o linie poligonală, ci printr-o curbă, obţinem curba cumulativă a seriei considerate.

3. Reprezentarea seriilor cronologice

Să presupunem că într-un internat se dau zilnic note fiecărui dormitor pentru întreţinerea curăţeniei. Rezultatele obţinute de un anumit dormitor într-o săptămînă sînt date în tabela 17.

Tabela 17

L	10	*V*	8
M	9	*S*	10
M	9	*D*	9
J	10		

Diagrama corespunzătoare acestei tabele este dată în figura 9.

În acelaşi mod se fac graficele realizărilor zilnice (săptămînale, lunare) — individuale sau colective — într-o întreprindere. Abscisele

)unctelor care se unesc prin linia poligonală sînt mijloacele egmentelor reprezentînd intervalele de timp (sau punctele reprezenînd momentele), iar ordonatele, valorile mărimii considerate, în ntervalul de timp corespunzător.

§ 3. Elemente caracteristice ale unei serii statistice

În cele ce urmează *vom numi valoare centrală a unei clase de variație, media aritmetică a extremităților acestei clase.* Astfel, valoarea centrală a clasei 165—170 din tabela 11 este 167,5.

1. Modul

Modul sau dominanta unei serii statistice se numește valoarea caracteristicii corespunzătoare celei mai mari frecvențe în cazul cînd valorile caracteristicii sînt date individual și valoarea centrală a clasei corespunzătoare celei mai mari frecvențe, în cazul variabilelor continue, cînd se dau clase de variație. Această noțiune prezintă interes mai ales în cazurile cînd avem o singură dominantă.

În cazul prezentat în tabela 3, dominanta este 7, iar în cazul tabelei 11 este 177,5.

2. Mediana

Mediana unei serii este un număr x astfel că există tot atîtea unități statistice corespunzătoare valorilor $< x$, ca și cele corespunzătoare valorilor $> x$.

Dacă o caracteristică ia valorile

1, 3, 3, 3, 4, *5*, 6, 6, 7, 8, 9,

atunci 5 este mediana, deoarece există 5 valori < 5 și 5 valori > 5. Dacă avem valorile

1, 3, 3, 3, *4*, *5*, 6, 7, 7, 9,

atunci vom lua ca mediană media aritmetică a numerelor situate la mijloc (dacă ele au fost în ordinea mărimii). În acest caz, mediana este 4,5. Uneori se consideră ca mediană oricare din cele două numere.

Cum se calculează mediana în cazul unei variabile continue, vom arăta pe un exemplu. Să considerăm pentru aceasta tabela 16.

Dacă piesele ar fi aranjate în ordinea diametrelor lor, noi vrem să calculăm diametrul celei de-a 30-a. Diametrul acestei piese este cuprins între 30 și 40 mm. Clasa 30—40 are frecvența absolută 12. Vom presupune că diametrul celor 12 piese corespunzătoare crește uniform de la 30 la 40. Deci creșterea diametrului de la o piesă la următoarea este $\frac{40-30}{12}$. Pe de altă parte, a 30-a piesă a populației este a $30-25 =$ a 5-a piesă a clasei (deoarece există 25 de piese cu diametrul < 30). Deci, diametrul celei de-a 30-a piesă este

$$30 + (30 - 25) \times \frac{40-30}{12} = 34{,}16 \text{ mm.}$$

3. Media aritmetică

Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt n valori, se știe că *media lor aritmetică* este $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Fiind dată distribuția unei variabile x

Valori	Frecvențe
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
.	.
x_n	y_n

valoarea medie a variabilei respective este

$$\bar{x} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}. \qquad (1)$$

Dacă $N = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ este efectivul total al populaţiei, atunci

$$\bar{x} = x_1 \frac{y_1}{N} + x_2 \frac{y_2}{N} + \ldots + x_n \frac{y_n}{N}$$

sau, dacă notăm cu $f_i = \frac{y_i}{N}$ frecvenţa relativă a valorii $x_i (i = 1, 2, .. n)$

$$\bar{x} = x_1f_1 + x_2f_2 + \ldots + x_nf_n.$$

Expresia (1) are într-adevăr semnificaţia unei medii aritmetice. Variabila x ia după cum reiese din tabelă de y_1 ori valoarea x_1, de y_2 ori valoarea x_2 ş.a.m.d. Deci pentru a calcula valoarea medie a variabilei, calculăm media aritmetică a numerelor

$$\underbrace{x_1, x_1 \ldots, x_1}_{y_1 \text{ ori}}, \quad \underbrace{x_2, x_2 \ldots, x_2}_{y_2 \text{ ori}}, \ \ldots, \quad \underbrace{x_n, x_n, \ldots, x_n}_{y_n \text{ ori}}$$

şi obţinem chiar expresia din membrul drept al relaţiei (1). Această expresie se mai numeşte media aritmetică ponderată a numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, numerele $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fiind ponderile respective ale acestor valori.

Dacă vom considera datele tabelei 3 rezultă că media pe întreaga clasă la notele la matematică este

$$\frac{10\times1+9\times3+8\times6+7\times15+6\times7+5\times4+4\times2+3\times1+2\times1}{40} = 6{,}625.$$

Cazul seriilor cu variaţie continuă, îl reducem la cazul precedent, substituind fiecare clasă cu valoarea sa centrală.

Astfel în exemplul prezentat în tabela 16 se obţin datele din tabela 18.

Tabela 18

Mărimea diametrului	Frecvenţa absolută y_i	Valoarea centrală x_i	$x_i y_i$
10—20	10	15	150
20—30	15	25	375
30—40	12	35	420
40—50	15	45	675
50—60	8	55	440
	60		2 060

$$\bar{x} = \frac{2\,060}{60} = 34{,}3.$$

Dacă vrem să lucrăm cu numere mai mici decît cele ce ne sînt date în tabele facem următoarele observaţii. Avem pentru orice i

$$x_i = x_0 + (x_i - x_0),$$

$$x_iy_i = x_0y_i + (x_i - x_0)y_i.$$

Dînd lui i valorile 1, 2, ..., n obţinem n relaţii care adunate termen cu termen ne dau

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = x_0(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) +$$

$$+ (x_1 - x_0)y_1 + (x_2 - x_0)y_2 + \ldots + (x_n - x_0)y_n$$

sau, împărţind cu $N = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$,

$$\bar{x} = x_0 + \frac{(x_1 - \bar{x}_0)\ y_1 + (x_2 - \bar{x}_0)\ y_2 + \ldots + (x_n - \bar{x}_0)y_n}{N}.$$

Această relaţie o mai putem scrie

$$\bar{x} - x_0 = \overline{x - x_0}.$$

În exemplul precedent, luînd $x_0 = 35$, avem calculele prezentate în tabela 19.

Tabela 19

Clase	Frecvența absolută y_i	Val. centrală x_i	$x_i - x_0$	$(x_i - x_0)y_i$
10—20	10	15	—20	—200
20—30	15	25	—10	—150
30—40	12	35	0	0
40—50	15	45	10	150
50—60	8	55	20	160
	60			—40

$$\bar{x} = 35 - \frac{40}{60} = 34{,}3.$$

4. Dispersia

Fiind date n valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a căror medie este x, se numește dispersia acestor valori, mărimea

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}.$$

Fiind dată seria statistică

Valori x_i	Frecvența absolută y_i
x_1	y_1
x_2	y_2
.	.
.	.
.	.
x_n	y_n

unde $N = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ și $\bar{x} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{N}$ sînt respectiv efectivul total al populației și valoarea medie, dispersia corespunzătoare este

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2y_1 + (x_2 - \bar{x})^2y_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2y_n}{N}.$$

Mărimea

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

se numește abaterea medie pătratică. Ea se exprimă în aceleași unități ca și caracteristica seriei.

În cazul caracteristicilor continue se substituie fiecare interval de variație prin valoarea sa centrală.

Să dăm și o altă formă dispersiei. Vom dezvolta expresia

$$\frac{1}{N}[(x_1 - \bar{x})^2y_1 + (x_2 - \bar{x})^2y_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2y_n]$$

și obținem

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}[x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + \ldots + x_n^2y_n - 2\bar{x}(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n) +$$

$$+ \bar{x}^2(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)] = \frac{x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + \ldots + x_n^2y_n}{N} - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + \ldots + x_n^2y_n}{N} - \bar{x}^2. \qquad (2)$$

Deci

$$\sigma^2 = \bar{x}^2 - \bar{x}^2.$$

Dacă am fi înlocuit mărimile x_i prin $x_i - x_0$ unde x_0 este o constantă, am fi obținut

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - x_0)^2y_1 + (x_2 - x_0)^2y_2 + \ldots + (x_n - x_0)^2y_n}{N} - (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 \qquad (2')$$

unde prin $\overline{x^2}$ am notat media aritmetică a mărimilor $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n$ cu ponderile $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Am regăsit o proprietate a dispersiei unei variabile aleatoare.

Dispersia sau mai bine zis, abaterea medie pătratică indică gradul de împrăştiere a valorilor în jurul valorii medii. O valoare mică a abaterii indică o pronunţată grupare a valorilor în jurul mediei aritmetice.

Să calculăm tabela 19 cu datele necesare calculului dispersiei σ^2. Vom calcula σ^2 atît direct cît şi folosind formula (2').

Luăm $x_0 = 35$ şi ştim că $\bar{x} = 34{,}3$. Se obţin datele din tabela 20.

Tabela 20

Clase	Frecv. y_i	Val. centr. x_i	$x_i - x_0$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - x_0)^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i(x_i - x_0)^2$	$y_i(x_i - \bar{x}_0)^2$
10–20	10	15	–20	–19,3	400	372,49	4000	3 724,90
20–30	15	25	–10	– 9,3	100	86,43	1 500	1 296,45
30–40	12	35	0	0,7	0	0,49	0	5,88
40–50	15	45	10	10,7	100	114,49	1 500	1 717,35
50–60	8	55	20	20,7	400	428,49	3 200	3 427,92
	60						10 200	10 172,50

Deci

$$\sigma^2 = \frac{10\,172{,}5}{60} = 169{,}5$$

sau folosind (2')

$$\sigma^2 = \frac{1}{60} \times 10\,200 - (34{,}3 - 35)^2 = 169{,}5.$$

Se observă că alegînd convenabil valoarea lui x_0, calculele se simplifică.

§ 4. Distribuţii teoretice şi distribuţii experimentale

1. Generalităţi

După cum se ştie o funcţie teoretică $y = f(x)$ este o corespondenţă pur matematică între o mulţime de elemente x şi o mulţime de elemente y. Să considerăm, spre exemplu, funcţia $S = f(t)$ definită pentru $t \geqslant 0$ prin relaţia

$$S = \frac{gt^2}{2}$$

unde $g = 0{,}98$. Dacă dăm lui t diverse valori ($t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, obţinem tabela 21.

Tabela 21

t	0	1	2	3
S	0	0,49	1,96	4,41

Graficul corespunzător este cel din figura 10.

Dacă t este măsurat în secunde, iar g în 10 m/s², atunci funcţia de mai sus reprezintă legea căderii corpurilor în vid. Dacă vrem să verificăm experimental această lege, lăsăm un corp să cadă şi vom măsura spaţiile parcurse $S_1, S_2, S_3, \ldots$, corespunzătoare momentelor $t_1, t_2, t_3, \ldots$ Corespondenţa între mărimile experimentale t şi S defineşte o funcţie empirică. În general, nu vom obţine la fiecare efectuare a experienţei aceleaşi valori pentru S corespunzătoare valorilor alese pentru t, ele schimbîndu-se în raport cu condiţiile în care se efectuează experienţa.

În tabela 22 sînt trecute datele obţinute experimental.

Tabela 22

t (s)	1	2	3	4
S (metri)	0,44	2,1	4,6	7,5

Fig. 10

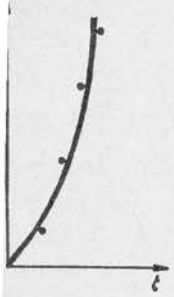

Fig. 11.

Problema care se pune, este ca din datele experimentale (care definesc distribuţia empirică sau experimentală a fenomenului studiat) să deducem cu o precizie cît mai mare distribuţia teoretică, atunci cînd aceasta din urmă nu este cunoscută dinainte (cum am presupus în exemplul nostru, pentru a ne face mai uşor înţeleşi). Aceasta este o problemă de ajustare (a distribuţiei experimentale, după o distribuţie teoretică).

În figura 11 sînt trecute, în raport cu acelaşi sistem de axe, punctele obţinute experimental şi graficul funcţiei teoretice.

Distribuţiile întîlnite mai înainte, ca distribuţia binomială, distri-ţia normală etc. sînt distribuţii teoretice.

Să presupunem că se aruncă o monedă de 4 ori. Probabilitatea ţinerii „stemei" de 2 ori şi a „banului" de 2 ori este $C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$ 0,375. Acest număr reprezintă pentru noi frecvenţa teoretică, nu-ărul în jurul căruia oscilează frecvenţele experimentale, dacă facem de număr mare de ori experienţa, în ipoteză că moneda este „corectă". acă vom efectua 1 000 de serii de cîte 4 aruncări, numărul seriilor care a apărut fiecare faţă de 2 ori va fi exact 375, dar dacă moneda te perfect simetrică, va fi un număr apropiat de 375.

În general, pentru ca o distribuţie teoretică să aproximeze o dis-ibuţie empirică, trebuie ca frecvenţele experimentale să nu difere ult de cele teoretice. Aceasta face ca şi elementele caracteristice ale lor două distribuţii să ia valori apropiate.

După cum am mai spus, grafieul unei serii statistice poate sugera stribuţia teoretică corespunzătoare. Un grafic sub formă aproxima-vă de clopot şi cu o pronunţată tendinţă spre simetrie sugerează o ge normală. Să luăm următoarea:

Aplicaţie. *Efectuîndu-se o cercetare statistică a masei boabelor de grîu culese pe fiecare metru pătrat al unor arii de* $\frac{1}{4}$ ha, *omogene din toate punctele de vedere s-au obţinut rezultatele prezentate în tabela 23.*

Forma histogramei sugerează legea normală. Folosind datele din tabelă obţinem:

$$m = 80{,}67\,;\ \sigma^2 = 325{,}03\,;\ \sigma = 18{,}03.$$

Raportînd la acelaşi sistem de axe histrograma distribuţiei empirice şi graficul legii normale cu parametrii $m = 80{,}67$ şi $\sigma = 18{,}03$ se observă o deplină concordanţă între cele două curbe — empirică şi teoretică (fig. 12).

Tabela 23

Grupe de variaţie în g	Frecvenţa, în %
0 — 10	0,04
10 — 20	0,04
20 — 30	0,08
30 — 40	0,60
40 — 50	3,08
50 — 60	8,72
60 — 70	15,12
70 — 80	20,76
80 — 90	21,60
90 — 100	16,64
100 — 110	8,88
110 — 120	2,76
120 — 130	1,08
130 — 140	0,48
140 — 150	0,08
150 — 160	0,00
160 — 170	0,00
170 — 180	0,04
180 — 190	0,00
190 — 200	0,00
200 — 210	0,00
210 — 220	0,00

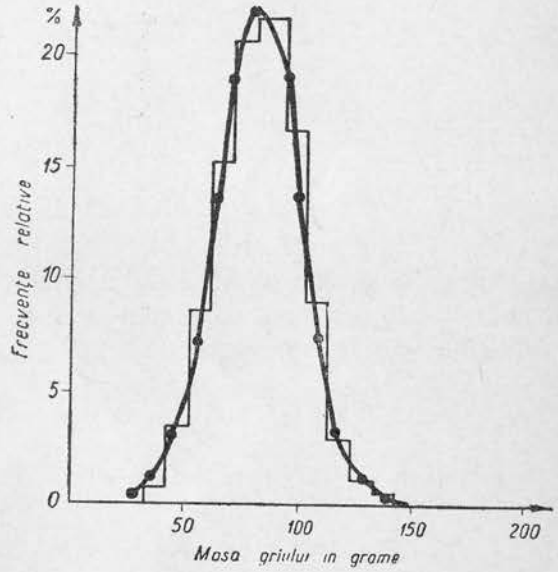

Fig. 12.

2. Ajustarea liniară

Dacă punctele corespunzătoare unei serii experimentale sînt distribuite aproximativ după o dreaptă, problema care se pune este de a determina această dreaptă. De exemplu, dacă măsurăm lungimile x_i ale unei bare metalice la temperaturile t_i, punctele (t_i, x_i) sînt situate

ximativ pe aceeaşi dreaptă (cînd t_i iau valori cuprinse între anu-
limite).

să presupunem că vrem să determinăm dreapta de ajustare cores-
zătoare tabelei de date experimentale (tab. 24).

Tabela 24

x	0	1	2	3	4	5
y	1,2	1,6	1,7	2,4	2,8	3,8

Una dintre metodele de ajustare liniară este *metoda mediilor dis-
tinue*. Ea constă în împărţirea sistemului de puncte obţinute experi-
ıtal în două grupe şi determinarea dreptei care trece prin
trul de greutate A al fiecărei grupe. În general, fiecare împărţire
grupe de puncte ne va da altă dreaptă de ajustare.

În exemplul nostru (tab. 24), centrul de greutate (punctul mediu)
sistemului format din punctele (0 ; 1,2), (1 ; 1,7), (2 ; 1,7) este punc-
A (1 ; 1,5), iar cel al sistemului (3 ; 2,4), (4 ; 2,8), 5 ; 3,8) este punc-
B (4 ; 3). Dreapta care trece prin A şi B este

$$(d) \qquad y = \frac{1}{2}x + 1.$$

În figura 13 sînt reprezentate punctele corespunzătoare tabelei 24
dreapta (d).

O altă metodă de ajustare este *metoda celor mai mici pătrate*. Con-
ierăm n puncte $A_i(x_i, y_i)$ şi dreapta (d) $y = ax + b$. Notăm

$$e_i = y_i - (ax_i + b)$$

erenţa dintre ordonata punctului A_i (de abscisă x_i) şi ordonata
nctului de abscisă x_i de pe dreapta (d) şi ne propunem să de-
minăm a şi b, astfel ca suma pătratelor acestor diferenţe:
$\sum e_i^2 = S$ să fie minimă. Avem

$$S = \Sigma[y_i - (ax_i + b)]^2 = \Sigma y_i^2 - 2\Sigma y_i(ax_i + b) + \Sigma(ax_i + b)^2 =$$

$$= \Sigma y_i^2 - 2a\Sigma x_i y_i - 2b\Sigma y_i + a^2\Sigma x_i^2 + 2ab\Sigma x_i + nb^2.$$

Observăm că S se scrie ca un polinom de gradul II în a şi b:

$$S = (\Sigma x_i)a^2 + 2(\Sigma x_i)\ ab + nb^2 - 2(\Sigma x_i y_i)a - 2(\Sigma y_i)b + \Sigma y_i^2.$$

Ne trebuie valorile lui a şi b pentru care S este minim. Vom rezolva mai întîi această problemă în cazul general.

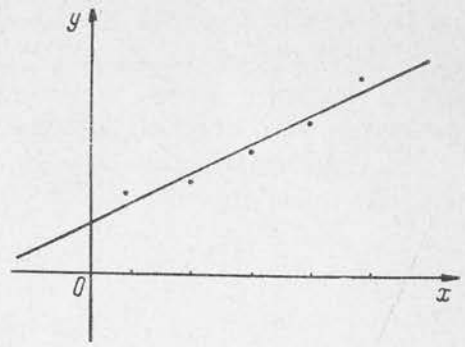

Fig. 13.

Observăm că polinomul

$$P(a\,;\,b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F$$

se mai poate scrie

$$P(a\,;\,b) = \frac{1}{C}(Ba + Cb + E)^2 + \frac{1}{C}[(AC - B^2)a^2 + 2(CD - BE)a + (CF - E^2)],$$

$$P(a\,;\,b) = \frac{1}{C}(Ba + Cb + E)^2 + \frac{1}{C(AC - B^2)}([AC - B^2)a + (CD - BE)]^2 + \frac{1}{C}(CF - E^2) - \frac{(CD - BE)^2}{C(AC - B^2)}.$$

Deci P se scrie ca o sumă de pătrate plus o constantă dacă $C > 0$, $AC - B^2 > 0$. În acest caz, P este minim, dacă fiecare din cele două pătrate este zero.

Deci

$$Ba + Cb + E = 0,$$

$$(AC - B^2)a + (CD - BE) = 0. \qquad (1)$$

Din a doua relaţie rezultă

$$a = \frac{BE - CD}{AC - B^2}. \qquad (2)$$

e observă că S rezultă din P, luînd

$= \Sigma x_i^2$, $B = \Sigma x_i$, $C = n$, $D = -\Sigma x_i y_i$, $E = -\Sigma y_i$, $F = \Sigma y_i^2$

e observă că $C = n > 0$. Relaţia $AC - B^2 = n\ \Sigma x_i^2 - (\Sigma\ x_i)^2 \geqslant 0$
ste o inegalitate cunoscută şi se demonstrează uşor prin inducţie.
ezultă, ţinînd cont de relaţiile (1) şi (2) că S este minim cînd

$$a = \frac{n\,\Sigma x_i y_i - \Sigma x_i\,\Sigma y_i}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2},$$

$$a\Sigma x_i + nb - \Sigma y_i = 0.$$

Aceste două relaţii se scriu

$$a = \frac{\Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2} \tag{3}$$

$$a\bar{x} + b = y \tag{4}$$

dacă notăm $\Sigma x_i = n\bar{x}$; $= \Sigma y_i = n\bar{y}$.
Remarcăm că relaţia (4) ne asigură că punctul $(x; y)$ se găseşte pe dreapta.

$$y = ax + b$$

Să găsim folosind metoda celor mai mici pătrate, dreapta de ajustare pentru tabela 24. Avem datele din tabela 25.

Tabela 25

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
0	1,2	0	0
1	1,6	1	1,6
2	1,7	4	3,4
3	2,4	9	7,2
4	2,8	16	11,2
5	3,8	25	19
Total 15	13,5	55	42,4

Avem

$$\bar{x} = \frac{15}{6} = 2{,}5; \quad y = \frac{13{,}5}{6} = 2{,}25; \quad n = 6;$$

$$a = \frac{42{,}4 - 33{,}75}{55 - 37{,}5} = \frac{8{,}65}{17{,}5} = 0{,}49.$$

Ţinînd cont de relaţia (4) rezultă

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2{,}25 - 0{,}49 \cdot 2{,}5 = 1{,}025.$$

Vom arăta că dacă înlocuim x_i cu $x_i - x_0$ şi y cu $y_i - y_0$ valoarea lui a nu se schimbă. Să facem aceste schimbări la numărătorul expresiei care dă pe a. Avem

$$\Sigma(x_i - x_0)(y_i - y_0) - n(\bar{x} - x_0)(y - y_0) =$$

$$= \Sigma x_i y_i - x_0\Sigma y_i - y_0\Sigma x_i + nx_0y_0 - n\bar{x}\bar{y} + nx_0\bar{y} + ny_0\bar{x} - nx_0y_0 =$$

$$= \Sigma x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}.$$

(Am ţinut cont că $n\bar{x} = \Sigma x_i$; $n\bar{y} = \Sigma y_i$.)
Făcînd aceleaşi înlocuiri la numitor obţinem

$$\Sigma(x_i - x_0)^2 - n(\bar{x} - x_0)^2 = \Sigma x_i^2 - 2x_0\Sigma x_i + nx_0^2 - n\bar{x}^2 + 2nx_0\bar{x} -$$

$$- nx_0^2 = \Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2.$$

Deci, făcînd substituţiile respective atît numărătorul cît şi numitorul rămîn neschimbate în relaţia (3). Alegînd convenabil pe x_0 şi y_0, calculele se pot simplifica. Relaţia (3) capătă o formă mai simplă dacă înlocuim pe x şi y prin $X = x - \bar{x}$ şi $Y = y - \bar{y}$. În acest caz

$$a = \frac{\Sigma X_i Y_i}{\Sigma X_i^2}.$$

Observaţie. La aceeaşi relaţie ajungem prin substituţiile $X = x - \bar{x}$ şi $Y = y - y_0$, unde y_0 este o constantă arbitrară.

Probleme

1. Să se dea exemple de populaţii statistice şi caracteristici.

2. Stabiliţi repartiţia elevilor clasei din care faceţi parte, în raport cu numărul fraţilor.

3. Stabiliți repartiția elevilor clasei din care faceți parte după media la matematică în clasa a XI-a.

4. Aruncați un zar de 120 de ori. Întocmiți tabela rezultatelor obținute. Comparați frecvențele absolute ale fiecărei fețe cu numărul 20.

5. Faceți tabela distribuției elevilor clasei după media la matematică și media la fizică obținută în clasa a XI-a (tabela cu dublă intrare).

6. Completați tabelele corespunzătoare problemelor **2, 3, 4** cu frecvențele relative și cu frecvențele cumulate. În cazul problemei **4** să se spună: la cîte aruncări s-a obținut o față cu un număr $\leqslant 3$ puncte? La cîte aruncări s-a obținut o față cu un număr $\geqslant 5$ puncte?

7. În tabela 26 sînt trecute rezultatele obținute într-o cursă de 100 m de către 40 de participanți.

Tabela 26

Timp (s)	Nr. de alergători	Timp (s)	Nr. de alergători
10,5—10,7	1	11,5—11,7	7
10,7—10,9	1	11,7—11,9	6
10,9—11,1	2	11,9—12,1	5
11,1—11,3	5	12,1—12,3	4
11,3—11,5	7	12,3—12,5	2

Să se completeze tabela cu valorile centrale ale claselor, cu frecvențele relative și cu frecvențele cumulate. Să se citească pe tabela obținută cîți alergători au realizat timpuri mai bune de 11,7 s. Care este procentul de alergători care au realizat timpuri mai bune de 11,5 s.

8. Să se reprezinte grafic, în batoane, seriile de la problemele **2, 3, 4.**

9. Să se construiască histograma, poligonul frecvențelor și poligonul frecvențelor cumulate crescătoare pentru seria din problema **7.**

10. Să se calculeze dominanta, mediana și valoarea medie (media aritmetică) pentru seriile de la problemele **2, 3, 4.**

11. Să se stabilească timpul mediu realizat pe 100 m de către 40 de alergători, ale căror rezultate sînt trecute în tabela 26.

12. În tabela 27 este prezentată distribuția elevilor dintr-o școală generală după talie.

Tabela 27

Talia (cm)	Număr elevi
150—154	38
154—158	65
158—162	175
162—166	189
166—170	111
170—174	62
	640

Să se completeze tabela. Să se construiască histograma corespunzătoare. Să se calculeze și să se interpreteze dominanta și mediana. Să se calculeze înălțimea medie a elevilor școlii.

13. Să se calculeze dispersiile seriilor de la problemele **2, 3, 4, 7. 12.**

14. Să se reprezinte grafic punctele corespunzătoare fiecăreia din tabela de mai jos. Să se determine dreapta de ajustare, atit grafic* cît și prin metoda mediilor discontinue, și metoda celor mai mici pătrate.

a)

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3,2	2,4	2,2	1,8	0,9	0,3

b)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,1	1,8	3,1	4,2	4,8	5,8	7,2

Să se compare rezultatele obținute prin cele 3 metode.

* Pentru a determina grafic dreapta de ajustare reprezentăm pe o hîrtie milimetrică punctele seriei, apoi căutăm să găsim poziția unei drepte, trasată pe o hîrtie transparentă printre punctele reprezentate grafic, astfel încît aceasta să se distribuie cît mai uniform de o parte și de alta a dreptei. E bine să figurăm și centrul de greutate al sistemului de puncte și să facem ca dreapta să treacă prin acest punct.

Indicații și răspunsuri

Cap. 1

1. Pentru a arăta că $X = Y$, arătăm că evenimentele X și Y se implică reciproc. Au că mulțimile X și Y se conțin reciproc. Să arătăm, spre exemplu, că evenimentul $(A \cup B)$ implică evenimentul $CA \cap CB$. Într-adevăr dacă $C(A \cup B)$ se realizează înseamnă că nu se realizează $A \cup B$, adică nu se realizează nici A, nici B. Aceasta înseamnă că se realizează și CA și CB, deci $CA \cap CB$. La fel se arată că $CA \cap CB$ implică $C(A \cup B)$. Mai general, avem

$$C(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = CA_1 \cap CA_2 \cap \ldots \cap CA_n.$$

4. *a*) nimerirea coroanei dintre cercurile de raze r_5 și r_6;

b) nimerirea coroanei circulare dintre cercurile de raze r_1 și r_7;

c) nimerirea coroanei circulare dintre cercurile de raze r_k și r_{10}, sau nimerirea în afara țintei;

d) dacă este nimerit interiorul cercului de rază r_k, este nimerit și interiorul cercului de rază r_{k+1}, deoarece primul este conținut în al doilea.

5. a) $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_7$; b) $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_7) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_7) \cup \ldots \cup (\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_7)$; c) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7$; d) $(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_7) \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap A_7) \cup \ldots \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap A_7)$; e) $A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup \ldots \cup (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_7)$; f) $\bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5 \cap \bar{A}_6 \cap A_7$.

6. *a*) Pentru a se realiza evenimentul $\{M3\} \cap \{M7\}$ trebuie să obținem o bilă care să fie în același timp multiplu de 3 și de 7, deci de 21, adică se realizează $\{M21\}$. Reciproc, dacă obținem o bilă numerotată cu un multiplu de 21, am obținut în același timp un multiplu de 3 și 7. Se raționează la fel pentru punctele *b*) și *d*);

c) dacă a este multiplu de b, atunci orice multiplu al lui a, este și multiplu al lui b și de aceea putem spune că evenimentul (Ma) implică evenimentul (Mb).

7. *a*) $\frac{3}{8}$; *b*) $\frac{1}{8}$; *c*) $\frac{1}{4}$; *d*) $\frac{1}{4}$; *e*) $\frac{1}{2}$; *f*) $\frac{1}{2}$

8. Calculăm mai întîi probabilitatea evenimentului contrar: ca prima fișă extrasă să nu conțină cifra 5. Numărul cazurilor favorabile este egal cu numărul sistemelor de 4 cifre ce se pot forma cu

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

adică $9^4 = 6\,561$ și probabilitatea căutată este $\frac{6\,561}{10\,000} = 0{,}6561$. Probabilitatea din enunț este $1 - 0{,}6561 = 0{,}3439$.

Observație. Am considerat că numărul fiecărei fișe este format din 4 cifre. Astfel fișa cu numărul 1 poartă scris numărul 0001, iar cea cu numărul 35 este notată cu 0035. În loc de numărul 0000 considerăm numărul 10 000.

9. *Indicație.* Se calculează mai întîi probabilitatea evenimentului contrar.

Răspuns: $1 - \frac{C_{90}^5}{C_{100}^5}$.

10. Cele 7 cifre pot fi scrise în 7! moduri. Dacă cifrele 1 și 2 au locurile stabilite atunci celelalte cifre se pot scrie în 5! moduri. Dar cifrele 1 și 2 pot ocupa locuri consecutive în ordinea 1,2 în 6 moduri.

Răspuns: $\frac{5!6}{7!} = \frac{1}{7}$.

11. *a*) *Indicație.* Fie A evenimentul ca prima bilă să fie albă și a doua să fie neagră și B evenimentul ca prima bilă să fie neagră și a doua tot neagră. A și B sînt evenimente incompatibile. Avem de calculat $P(A \cup B)$.

Răspuns: $\frac{27}{49}$.

b) $\frac{31}{49}$; *c*) $\frac{5}{7}$.

12. $\frac{6!}{6^6} = 0{,}015$; $1 - \frac{5^6}{6^6} = 0{,}665$.

13. *Indicație.* Dacă A este evenimentul ca la prima aruncare să obținem stema, B evenimentul ca la prima aruncare să obținem banul și la a doua stema, C evenimentul ca la prima să obținem banul, la a doua banul și la a treia stema. Avem de calculat $P(A \cup B \cup C)$.

Răspuns: $\frac{7}{8}$.

14. Fie A evenimentul ca prima bilă extrasă să fie albă și a doua bilă extrasă să tot albă, iar B evenimentul ca prima să fie neagră, iar a doua albă. Avem de calcu- $P(A \cup B)$.

Răspuns: $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

15. *a)* $\frac{6}{35}$; *b)* $\frac{12}{35}$; *c)* $\frac{23}{35}$; *d)* $\frac{18}{35}$.

16. *a)* Fie k numărul multiplilor de a, care se găsesc printre numerele 1, 2, 3, ..., Acești multipli sînt: a, $2a$, $3a$, ..., ka. Rezultă că $n = ka + r$, unde $0 < r < a$. utem scrie $\frac{n}{a} = k + \frac{r}{a}$ și deci $\left[\frac{n}{a}\right] = k$. Pentru extragerea unui multiplu de a, vem k cazuri favorabile din n posibile. Probabilitatea căutată este $\frac{k}{n} = \frac{\left[\frac{k}{a}\right]}{n}$.

b) Calculăm mai întîi probabilitatea p a obținerii unui multiplu de a. Deoarece $= ka$, avem $p = \frac{k}{ka} = \frac{1}{a}$.

c) Indicație. $P(\{Ma\} \cup \{Mb\}) = P(\{Mab\})$. Se aplică rezultatul de la punctul *b)*.

Cap. 2

1. *Indicație.* Dacă A este evenimentul obținerii unei bile cu un număr mai mare a 5 și B evenimentul obținerii unui număr par se aplică relația $P(A \cup B) = P(A) + + P(B) - P(A \cap B)$.

Răspuns: $\frac{7}{10}$.

3. $\frac{59}{99}$. **4.** *Indicație.* Se aplică formula $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

Răspuns: $\frac{3}{4}$.

Observație. Se poate calcula direct, urmărind cazurile favorabile.

5. Se aplică formula de la indicația din problema precedentă și se ține cont că avem de-a face cu evenimente independente

Răspuns: $\frac{119}{120}$.

8. *Indicație.* Sîntem în cadrul schemei lui Poisson.

Răspuns: $\frac{121}{256}$.

9. $\frac{5\,297}{20\,000}$; $\frac{13\,253}{20\,000}$.

10. *Indicație.* Probabilitatea ca la o aruncare a zarurilor să obținem suma 7 este $\frac{1}{6}$. Sîntem în cazul schemei lui Bernoulli cu $n = 10$; $p = \frac{1}{6}$, $k = 3$.

Răspuns: $C_{10}^{3} \cdot \frac{5^7}{6^{10}}$.

11. $C_8^4 \frac{1}{2^8} = \frac{35}{128}$; $C_8^4 \frac{1}{2^8} + C_8^5 \frac{1}{2^8} + \ldots + C_8^8 \frac{1}{2^8} = \frac{163}{256}$.

12. *Indicație.* Probabilitatea obținerii unei fețe cu mai mult de 4 puncte la o aruncare a zarurilor este $\frac{1}{3}$. Sîntem în cazul schemei lui Bernoulli cu $n = 10$, $k = = 4$, $p = \frac{1}{3}$.

Răspuns: $C_{10}^{4} \frac{1}{3^4} \frac{2^6}{3^6}$.

13. *Indicație.* Dacă A este evenimentul obținerii a 2 bile albe și una neagră din prima urnă, iar B evenimentul obținerii a 2 bile albe și una neagră din următoarele 3 urne, aplicăm formula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, ținînd cont că A și B sînt evenimente independente. $P(A)$ se calculează pe baza schemei lui Bernoulli iar $P(B)$ pe baza schemei lui Poisson.

Răspuns: $\frac{108}{343} + \frac{146}{343} - \frac{108 \cdot 146}{343^2}$.

14. *Indicație.* Fie p_i ($i = 1, 2, 3$) probabilitatea obținerii a 2 bile albe și 3 negre în cele 5 extrageri din urna U_i. Probabilitatea cerută se calculează pe baza schemei lui Poisson cu $n = 3$, $k = 2$ și cu probabilitățile p_1, p_2, p_3. Probabilitățile p_i se calculează fiecare pe baza schemei lui Bernoulli.

15. *Indicație.* Pe baza schemei lui Poisson se calculează probabilitatea p ca făcînd cîte o extragere din fiecare urnă să obținem o bilă albă și două negre. Probabilitatea cerută rezultă din schema lui Bernoulli cu parametrii p, $n = 5$, $k = 3$.

Cap. 3

1. $S\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$.

2. $N\begin{pmatrix} 12 & 4 & 1 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

3. $S+1\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{12} & \frac{1}{9} & \frac{5}{36} & \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{12} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$; $2N\begin{pmatrix} 24 & 8 & 2 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$.

4. $X^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

5. $X^n\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ dacă n este impar; $X^n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ dacă n este par;

$Y^n\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ dacă n este impar;

$Y^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dacă n este par.

6. *Indicații.* $P(X \leqslant 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$. p se calculează ținînd cont că suma elementelor din al doilea rînd al tabloului distribuției lui X este 1. Răspunsul se poate obține direct ținînd cont că $P(X \leqslant 3) = P(X \neq 4) = 1 - P(X = 4) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Trebuie totuși să știm că distribuția este posibilă dacă $0 \leqslant p \leqslant 1$.

7. Se obține același tablou ca la variabila S de la problema 1.

8. $X^2 + Y^2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}$.

9. *Indicație.* Se calculează p și q ținînd cont că suma elementelor din linia a doua a oricărui tablou de distribuție este 1.

10. *Tabloul lui* $X + Y$ este

$$X+Y\begin{pmatrix} a-1 & a & a+1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Trebuie ca 0 să mai apară cel puțin o dată în primul rînd al tabloului.

Răspuns: $a = 1$; $a = 0$; $a = -1$

11. $X + X^2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $X + X^2\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

13. $[M(X)]^2 = 4{,}41$; $M(X^2) = 5{,}3$; $M(X-1) = 1.1$; $M(X^2 - 2X) = 1.1$.

14. 7. **15.** 21; **16.** $M(X) = 3 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$; $M(Y) = \frac{1}{n+1}$.

18. $M(Y) = 0$; $D^2(Y) = 1$;

19. *Indicație.* Se ține cont să calculăm dispersia sumei a șase variabile independente

Răspuns: $\frac{35}{2}$.

20. $\alpha_1 = \frac{6}{\sqrt{35}}$; $\alpha_2 = -\frac{11}{\sqrt{35}}$.

21. *Indicație.* Se ține cont că $D^2(X - Y) = D^2(X) + D^2(Y)$.

Răspuns: $a = 1$;

Cap. 4

11. 11,62 s; **12.** Dominanta = 164 cm. Mediana = 162,88. Mediana = 162,85; **13.** 0,1796; 26,76. **14.** *a)* Prin metoda mediilor discontinue, dacă cele două grupe de puncte sînt formate de primele 3 și respectiv ultimele 3 puncte, obținem dreapta

$$y = -\frac{1{,}6}{3}x + \frac{9{,}4}{3}.$$

Prin metoda celor mai mici pătrate, obținem

$$y = -\frac{97}{175}x + \frac{223}{70}.$$

Cele două rezultate sînt comparabile.

b) Prin metoda mediilor discontinue, considerînd sistemele formate din primele 3 puncte și respectiv ultimele 4 puncte, obținem

$$y = x + 1.$$

Prin metoda celor mai mici pătrate obținem același rezultat.

Bibliografie

1. Ciucu, G.
   Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică. Editura didactică și pedagogică, București, 1963.
2. Mihoc, G., Urseanu, V.
   Matematici aplicate în statistică, Editura Academiei R.S.R. București, 1962.
3. Mihoc, G., Micu, N.
   Elemente de teoria probabilităților și statistică, proiect de manual pentru clasa a XII-a Editura didactică și pedagogică, București, 1966.
4. Onicescu, O.
   Teoria probabilităților și aplicații. Editura didactică și pedagogică, București 1963.
5. Ciucu, G., Craiu, V., Săcuiu, I.,
   Culegere de probleme de teoria probabilităților. Editura tehnică, București 1967.
6. Iaglom, A. M., Iaglom I. M.
   Probleme neelementare, tratate elementar, Editura tehnică, București, 1962.

Nr. colilor de tipar : 6

Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.
Com. nr. 20 249/18 103